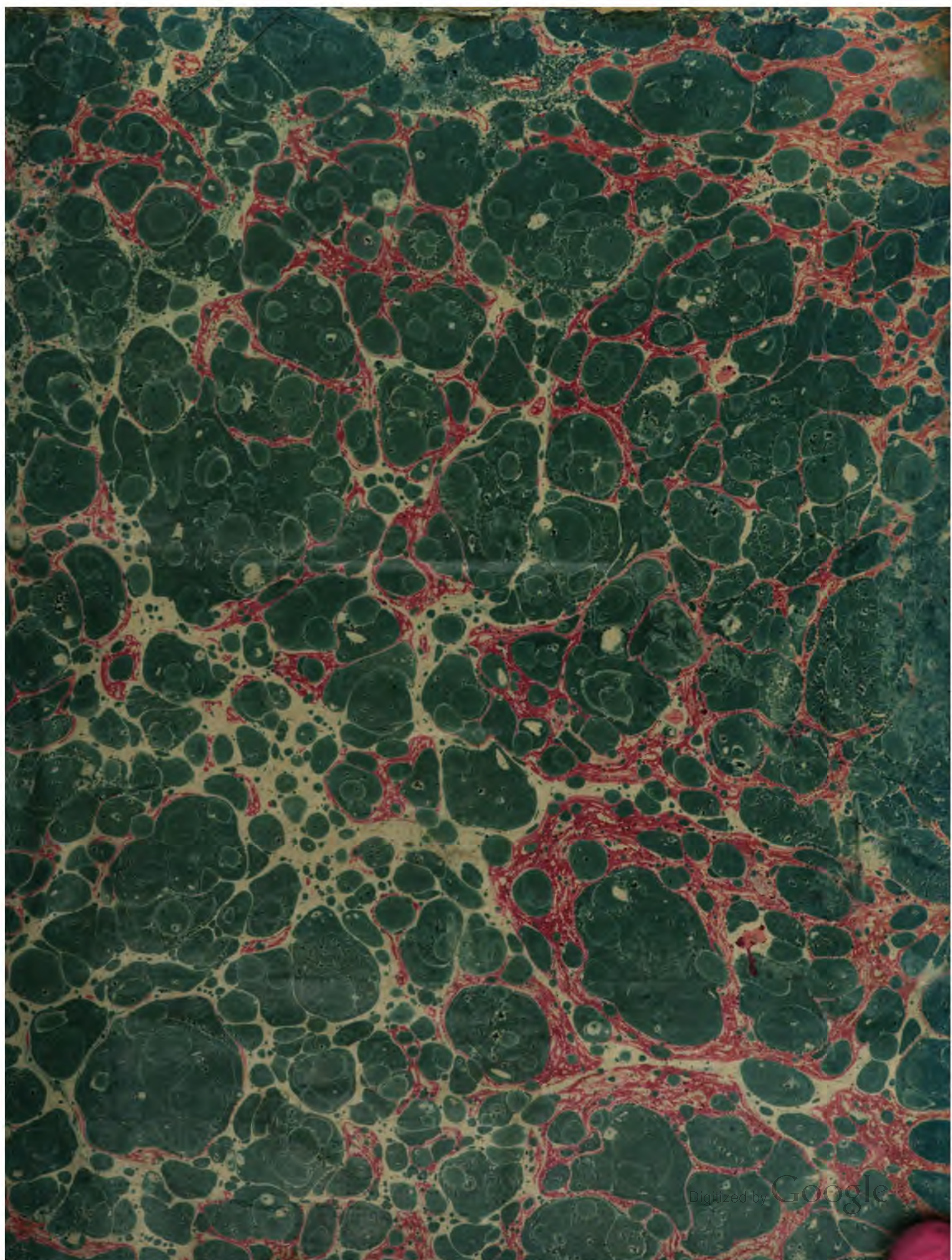






ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le premier juillet 1810, ce recueil paraît de mois en mois, par livraisons de 30 à 40 pages. La couverture de chaque livraison présente l'annonce des ouvrages nouveaux et des concours académiques.

On peut souscrire indifféremment,

Au bureau des *Annales*, rue du St-Sacrement, n.° 252, à Montpellier, [Hérault],

Chez madame *veuve Courcier*, imprimeur-libraire pour les mathématiques, rue du Jardinet, n.° 12, quartier de St-André-des-Arts, à Paris,

Et à tous les bureaux de poste.

Les articles à insérer doivent être adressés, francs de port, au *Bureau des Annales*.

Le prix de la souscription annuelle est 21 fr. pour la France, et 24 fr. pour l'étranger. Il en coûte moitié moins pour six mois ; et le prix de chacun des sept premiers volumes est inférieur de 3 fr. à celui de la souscription annuelle. Les lettres et l'argent doivent être affranchis.

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche	I.	Après la page	156.
	II.		256.
	III.		324.

ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.
RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ

Par J. D. GERGONNE, professeur d'astronomie à la faculté des sciences de Montpellier, membre de plusieurs sociétés savantes.

TOME SEPTIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez la dame Veuve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, rue du Jardinet, n.° 12, quartier de St-André-des-Arts.

1816 ET 1817.





ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

MÉCANIQUE CÉLESTE.

Recherche des équations différentielles du mouvement des astres, de leurs intégrales premières, et des élémens de l'orbite, en fonction des constantes que renferment ces intégrales;

Par M. Gergonne.

M. Laplace, dans la *Mécanique céleste* [tom. 1.er, page 163, équations (P)], a présenté les intégrales premières des équations du mouvement des astres sous une forme élégante, qui permet d'exprimer simplement les élémens de l'orbite en fonction des coordonnées de l'astre, pour une époque quelconque, et de ses vitesses parallèles aux axes, pour la même époque. Je me propose ici d'obtenir ces mêmes intégrales premières, sous une forme un peu plus simple, par un procédé, moins analitique sans doute que celui de l'illustre géomètre que je viens de citer, mais qui me paraît beaucoup plus élémentaire,

et qui, pour cette raison, sera peut-être plus du goût de quelques lecteurs.

Mais, pour ne rien emprunter d'ailleurs, je montrerai d'abord brièvement comment les équations différentielles du mouvement des astres se déduisent des *Lois de* KÉPLER. Je terminerai par faire voir comment les élémens de l'orbite se composent des constantes arbitraires que contiennent les intégrales premières de ces équations.

Pour la commodité typographique, j'emploirai constamment les notations différentielles de Lagrange ; le temps étant la seule variable supposée indépendante. Il suffira aux lecteurs peu familiarisés avec ces notations de considérer x' et x'' comme de simples abréviations des expressions $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$, et d'en faire de même à l'égard de toutes les autres variables, fonctions du temps.

§. I.

Lois de Képler.

On sait que les lois générales auxquelles Képler a été conduit par l'observation, et indépendamment de toute hypothèse, sont les suivantes :

I. Les planètes décrivent, dans l'espace, des sections coniques qui ont le centre du soleil pour foyer commun.

II. Les aires décrites par le rayon vecteur autour de ce foyer sont, pour une même planète, proportionnelles aux temps employés à les décrire.

III. Les quarrés des durées des révolutions sydérales des diverses planètes, dans leurs orbites respectives, sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes de ces orbites.

Soient, d'après cela, a, b, a', b' les demi-axes respectifs de deux orbites elliptiques, T, T' les temps périodiques dans ces orbites, t le temps d'un secteur quelconque s de la première, et enfin p son paramètre. Nous aurons

1.re Loi $\frac{1}{\sqrt{p}}=\frac{\sqrt{2a}}{2b}$,

2.me Loi $\frac{s}{t}=\frac{\varpi ab}{T}$,

3.me Loi $1=\frac{Ta'\sqrt{a'}}{T'a\sqrt{a}}$;

d'où, en multipliant et réduisant,

$$\frac{s}{t\sqrt{p}}=\varpi.\frac{a'\sqrt{2a'}}{2T'}.$$

Or, tout ce qui entre dans le second membre de cette dernière équation est constant, et relatif à une même orbite; donc,

L'aire décrite par le rayon vecteur d'un astre, durant un intervalle de temps quelconque, divisée par le temps employé à la décrire et par la racine quarrée du paramètre de l'orbite, est une quantité constante, pour tout le système solaire.

Cette loi unique, qui comprend à elle seule les deux dernières de Képler, a sur elles l'avantage d'être applicable aux orbites paraboliques et hyperboliques, tout comme aux orbites elliptiques.

Si nous représentons par $+\frac{1}{4}\sqrt{2\mu}$ la quantité constante qui forme le second membre de notre équation, nous aurons

$$\frac{\sqrt{2\mu}}{4}=\varpi\frac{a'\sqrt{2a'}}{2T'}, \quad \text{d'où} \quad \mu=\frac{4\varpi^2a'^3}{T'^2}.$$

On peut prendre, pour calculer μ, une planète quelconque. Si, par exemple, on choisit la terre; et que, suivant l'usage, on prenne son demi-grand axe pour unité de longueur, on aura simplement

$$\mu=\frac{4\varpi^2}{T'^2}.$$

Si, de plus, on prend le jour solaire moyen pour unité de temps, on aura $T'=365^j,2563835$; il viendra donc

$$\text{Log.}2\pi = 0,79817987$$
$$\text{Comp. Log. } t = 7.43740219$$

$$\text{Log}\sqrt{\mu} = 8.23558206$$
$$\text{Log.}\mu = 6.47116412$$
$$\mu = 0.00029591 \; (*) .$$

§. II.

Gravitation universelle.

Soient pris le plan de l'orbite d'un astre pour plan des coordonnées rectangulaires, et le foyer de cette orbite ou le centre du soleil pour origine; les axes des coordonnées ayant d'ailleurs une direction quelconque. Soit l la longitude du périhélie, comptée depuis l'axe des x positives, et du côté des y positives; soit de plus α la longitude de l'astre, comptée de la même manière, pour l'époque t. En supposant le mouvement direct, et cette époque postérieure à celle du périhélie, on aura l'anomalie vraie $\varphi = \alpha - l$. Si donc on désigne par ι le rapport de l'excentricité au demi-grand axe et par p la distance périhélie, ce qui donnera pour le paramètre $2(1+\iota)p$; en représentant par r le rayon vecteur qui répond à l'époque t, nous aurons, par la première loi de Képler, et par la théorie connue des sections coniques,

$$\iota r \text{Cos.}(\alpha - l) = (1+\iota)p - r \; ; \qquad (1)$$

ou, en développant,

(*) Dans l'exacte vérité, cette valeur de μ suppose la masse de la terre tout à fait nulle, par rapport à celle du soleil; mais nous avons voulu tout déduire des lois de Képler; et nous avons pu, d'autant plus, nous le permettre, que l'influence de la masse de la terre tombe au-delà de la 8.e décimale de la valeur de μ.

$$\epsilon(r\,\text{Cos.}\alpha\,\text{Cos.}l+r\,\text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}l)=(1+\epsilon)p-r\ ; \qquad (2)$$

Mais, si x et y sont les coordonnées de l'extrémité du rayon vecteur, on aura

$$x=r\,\text{Cos.}\alpha\ ; \qquad y=r\,\text{Sin.}\alpha\ , \qquad (3)$$

d'où

$$x^2+y^2=r^2\ ; \qquad (4)$$

au moyen de quoi l'équation (2) deviendra

$$\epsilon(x\,\text{Cos.}l+y\,\text{Sin.}l)=(1+\epsilon)p-r\ . \qquad (5)$$

En prenant le temps pour variable indépendante, et différentiant deux fois sous ce point de vue les équations (4, 5), il vient

$$xx'+yy'=rr'\ , \qquad (6)$$

$$x'^2+y'^2+xx''+yy''=r'^2+rr''\ , \qquad (7)$$

$$\epsilon(x'\,\text{Cos.}l+y'\,\text{Sin.}l)=-r'\ , \qquad (8)$$

$$\epsilon(x''\,\text{Cos.}l+y''\,\text{Sin.}l)=-r''\ . \qquad (9)$$

D'un autre côté, la différentiation des équations (3) donne

$$x'=r'\,\text{Cos.}\alpha-r\alpha'\,\text{Sin.}\alpha\ , \quad y'=r'\,\text{Sin.}\alpha+r\alpha'\,\text{Cos.}\alpha\ ; \qquad (10)$$

d'où on conclut (3, 10)

$$xy'-yx'=r^2\alpha'=2s'\ , \qquad (11)$$

s étant l'aire décrite par le rayon vecteur. Mais nous avons (§. I.)

$$\frac{s}{t\sqrt{2(1+\epsilon)p}}=\frac{1}{4}\sqrt{2\mu}\ ; \qquad (12)$$

d'où

$$2s=t\sqrt{(1+\epsilon)\mu p}\ ; \qquad (13)$$

donc, en différentiant,

$$2s'=\sqrt{(1+\epsilon)\mu p}\ ; \qquad (14)$$

et par conséquent (11)

$$xy'-yx'=\sqrt{(1+\epsilon)\mu p}\;; \qquad (15)$$

d'où, par une nouvelle différentiation,

$$xy''-yx''=0\,. \qquad (16)$$

Présentement, l'élimination de r', entre les équations (6, 8), donne

$$(x+\epsilon r\,\mathrm{Cos}.l)x'+(y+\epsilon r\,\mathrm{Sin}.l)y'=0\;; \qquad (17)$$

équation qui, combinée avec (15), donne, en ayant égard aux équations (3 et 5),

$$\left.\begin{aligned} x'&=-\frac{1}{r}(y+\epsilon r\,\mathrm{Sin}.l)\sqrt{\frac{\mu}{(1+\epsilon)p}}=-(\mathrm{Sin}.\omega+\epsilon\,\mathrm{Sin}\,l)\sqrt{\frac{\mu}{(1+\epsilon)p}}\,,\\ y'&=+\frac{1}{r}(x+\epsilon r\,\mathrm{Cos}.l)\sqrt{\frac{\mu}{(1+\epsilon)p}}=+(\mathrm{Cos}.\omega+\epsilon\,\mathrm{Cos}.l)\sqrt{\frac{\mu}{(1+\epsilon)p}}\,;\end{aligned}\right\} (18)$$

et ensuite, par la substitution dans (6),

$$r'=\frac{\epsilon}{r}(y\,\mathrm{Cos}.l-x\,\mathrm{Sin}.l)\sqrt{\frac{\mu}{(1+\epsilon)p}}=\epsilon\sqrt{\frac{\mu}{(1+\epsilon)p}}.\mathrm{Sin}.(\omega-l)\,. \qquad (19)$$

On tire encore des équations (18), en ayant égard à l'équation (5)

$$x'^2+y'^2=\frac{\mu}{p}.\frac{2p-(1-\epsilon)r}{r}\;; \qquad (20)$$

et l'équation (19) donne, en ayant toujours égard à la même équation (5),

$$r'^2=\frac{\mu}{p}.\left\{\frac{2p-(1-\epsilon)r}{r}-\frac{(1+\epsilon)p^2}{r^2}\right\}\;; \qquad (21)$$

donc

$$x'^2+y'^2-r'^2=\frac{\mu}{p}.\frac{(1+\epsilon)p^2}{r^2}=\frac{\mu}{r}.\frac{(1+\epsilon)p}{r}\,. \qquad (22)$$

Au moyen de cette dernière formule, l'équation (7) devient

$$xx''+yy''=rr''-\frac{(1+\epsilon)\mu p}{r^2}\;; \qquad (23)$$

ou encore, en éliminant r'', au moyen de l'équation (9) ;

$$(x+\epsilon r\,\text{Cos.}\,l)x''+(y+\epsilon r\,\text{Sin.}\,l)y''=-\frac{(1+\epsilon)\mu p}{r^2}. \qquad (24)$$

En combinant cette dernière équation avec l'équation (16), on en tire, en ayant toujours égard à l'équation (5),

$$x''=-\frac{\mu x}{r^3}, \quad y''=-\frac{\mu y}{r^3}; \qquad (25)$$

ce qui donne (4)

$$\sqrt{x''^2+y''^2}=\frac{\mu}{r^2}; \qquad (26)$$

et ensuite, au moyen de l'équation (9), en ayant encore égard à l'équation (5),

$$r''=\frac{\mu}{r}\cdot\frac{(1+\epsilon)p-r}{r^3}. \qquad (27)$$

L'équation (16) montre que les planètes sont mues en vertu d'une force d'impulsion combinée avec une force accélératrice, constamment dirigée vers le centre du soleil. L'équation (26) prouve que cette force, réciproquement proportionnelle au quarré de la distance de l'astre à ce centre, ne varie d'intensité, soit pour le même astre soit d'un astre à l'autre, qu'à raison de cette distance; et c'est en cela proprement que consiste le principe de la *gravitation*.

Si nous désignons par v la vitesse pour l'époque t, nous aurons (20)

$$v^2=\frac{\mu}{p}\cdot\frac{2p-(1-\epsilon)r}{r}.$$

La vitesse au périhélie, pour lequel on a $r=p$, sera donc

$$v=\sqrt{\frac{(1+\epsilon)\mu}{p}}.$$

Faisant successivement $\epsilon=0$ et $\epsilon=1$, on aura respectivement, pour le cercle et pour la parabole,

$$v=\sqrt{\frac{\mu}{p}}, \quad v=\sqrt{\frac{2\mu}{p}}.$$

Ainsi, à distance périhélie égale, la vitesse périhélie dans le cercle est à la vitesse périhélie dans la parabole comme 1 est à $\sqrt{2}$.

§. III.

Intégrales premières des équations du mouvement des astres.

D'après ce qui précède, en désignant par x, y, z les coordonnées, pour l'époque t, du centre d'un astre, rapporté à trois axes rectangulaires quelconques, passant par le centre du soleil, et en représentant par r le rayon vecteur correspondant, on aura

$$x''=-\frac{\mu x}{r^3}, \quad y''=-\frac{\mu y}{r^3}, \quad z''=-\frac{\mu z}{r^3}, \tag{28}$$

et on aura de plus

$$x^2+y^2+z^2=r^2; \tag{29}$$

d'où on déduira, par deux différentiations successives,

$$xx'+yy'+zz'=rr', \tag{30}$$

$$x'^2+y'^2+z'^2+xx''+yy''+zz''=r'^2+rr''. \tag{31}$$

Les équations (28), combinées successivement deux à deux, donnent, par l'élimination de μ,

$$yz''-zy''=0, \quad zx''-xz''=0, \quad xy''-yx''=0; \tag{32}$$

d'où l'on conclut, en intégrant,

$$yz'-zy'=A, \quad zx'-xz'=B, \quad xy'-yx'=C \tag{33}$$

A, B, C étant trois constantes.

En multipliant successivement chacune de ces équations par les équations (28) renversées, sauf celle de même rang qu'elle, il vient

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\mu z}{r^3}(zx'-xz')+Bz''=0, & \frac{\mu y}{r^3}(xy'-yx')+Cy''=0, \\ \frac{\mu x}{r^3}(xy'-yx')+Cx''=0, & \frac{\mu z}{r^3}(yz'-zy')+Az''=0, \\ \frac{\mu y}{r^3}(yz'-zy')+Ay''=0, & \frac{\mu x}{r^3}(zx'-xz')+Bx''=0. \end{array}\right\} \tag{34}$$

En

En prenant les différences respectives des équations de mêmes lignes, il vient

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mu}{r^3}\{(y^2+z^2)x'-(yy'+zz')x\}+Bz''-Cy''=0\ ,\\&\frac{\mu}{r^3}\{(z^2+x^2)y'-(zz'+xx')y\}+Cx''-Az''=0\ ,\\&\frac{\mu}{r^3}\{(x^2+y^2)z'-(xx'+yy')z\}+Ay''-Bx''=0\ .\end{aligned}\right\}(35)$$

Ces équations deviennent ensuite (29 et 30)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mu}{r^3}\{(r^2-x^2)x'-(rr'-xx')x\}+Bz''-Cy''=0\ ,\\&\frac{\mu}{r^3}\{(r^2-y^2)y'-(rr'-yy')y\}+Cx''-Az''=0\ ,\\&\frac{\mu}{r^3}\{(r^2-z^2)z'-(rr'-zz')z\}+Ay''-Bx''=0\ ;\end{aligned}\right\}(36)$$

ou, en réduisant,

$$\left.\begin{aligned}&\mu.\frac{rx'-xr'}{r^2}+Bz''-Cy''=0\ ;\\&\mu.\frac{ry'-yr'}{r^2}+Cx''-Az''=0\ ,\\&\mu.\frac{rz'-zr'}{r^2}+Ay''-Bx''=0\ ;\end{aligned}\right\}(37)$$

ou encore

$$\left.\begin{aligned}&\mu\left(\frac{x}{r}\right)'+Bz''-Cy''=0\ ,\\&\mu\left(\frac{y}{r}\right)'+Cx''-Az''=0\ ,\\&\mu\left(\frac{z}{r}\right)'+Ay''-Bx''=0\ ;\end{aligned}\right\}(38)$$

ce qui donne, en intégrant

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mu x}{r}+Bz'-Cy'&=D\ ,\\ \frac{\mu y}{r}+Cx'-Az'&=E\ ,\\ \frac{\mu z}{r}+Ay'-Bx'&=F\ ;\end{aligned}\right\}\quad(39)$$

D, E, F étant trois nouvelles constantes.

En prenant la somme des produits respectifs des équations (39) par A, B, C et réduisant ; il vient

$$AD+BE+CF=\frac{\mu}{r}(Ax+By+Cz)\ ;\qquad(40)$$

mais, en vertu des équations (33),

$$Ax+By+Cz=0\ ;\qquad(41)$$

donc aussi

$$AD+BE+CF=0\ .\qquad(42)$$

Nos six constantes se trouvent donc liées entre elles par une équation de relation ; d'où il suit que les intégrales premières auxquelles elles appartiennent n'équivalent qu'à cinq seulement ; et qu'ainsi nous avons encore une intégrale et une constante à obtenir : voici comment on parvient à l'une et à l'autre.

En prenant la somme des produits respectifs des équations (28) par $2x'$, $2y'$, $2z'$, l'équation résultante peut être mise sous cette forme

$$(x'^2+y'^2+z'^2)'=-\frac{\mu}{r^3}(x^2+y^2+z^2)'=-\frac{\mu}{r^3}.(r^2)'=-\frac{2\mu r'}{r^2}=2\left(\frac{\mu}{r}\right)'\ ;\qquad(43)$$

d'où, en intégrant,

$$x'^2+y'^2+z'^2=\frac{2\mu}{r}-\frac{\mu}{a}\ ;\qquad(44)$$

a étant une nouvelle constante.

§. IV.

Recherche des élémens de l'orbite.

Nous venons de voir, dans le précédent §., que A, B, C, D, E, F, étant six constantes, liées entre elles par la seule relation

$$AD+BE+CF=0, \qquad (42)$$

si l'on représentait par x, y, z les coordonnées du centre d'un astre, rapporté à trois axes rectangulaires, passant par le centre du soleil; par x', y', z' les vitesses de cet astre parallèlement aux trois axes; et enfin par μ le quarré du quotient qu'on obtient lorsqu'on divise la circonférence dont le rayon est 1 par la durée de l'année sydérale; nous avons vu, dis-je, que l'on avait les sept équations

$$\left.\begin{array}{l} yz'-zy'=A, \\ zx'-xz'=B, \\ xy'-yx'=C; \end{array}\right\}(33) \quad \left.\begin{array}{l} \frac{\mu x}{r}+Bz'-Cy'=D, \\ \frac{\mu y}{r}+Cx'-Az'=E, \\ \frac{\mu z}{r}+Ay'-Bx'=F; \end{array}\right\}(39)$$

$$x^2+y^2+z^2=r^2; \qquad (29)$$

de sorte que nos constantes sont simplement fonctions des coordonnées et des vitesses parallèles aux axes qui répondent à l'époque t. Nous allons montrer présentement comment les élémens de l'orbite se déterminent simplement en fonction de ces mêmes constantes.

Posons, pour abréger,

$$A^2+B^2+C^2=G^2; \qquad (45)$$

$$D^2+E^2+F^2=H^2. \qquad (46)$$

Les équations (3) donnent d'abord, comme nous l'avons déjà vu;

$$Ax+By+Cz=0\ ; \qquad (41)$$

équation d'un plan, qui est conséquemment celui de l'orbite, puisque t n'y entre pas.

Pour déterminer entièrement la figure de l'orbite, il nous faut encore une équation indépendante de t. Or, en prenant la somme des produits respectifs des équations (39) par x, y, z, il vient, en ayant égard aux équations (29), (33) et (45)

$$Dx+Ey+Fz=\mu r-G^2\ ; \qquad (47)$$

équation qui, combinée avec l'équation (41), détermine complètement la figure et la situation de l'orbite.

On reconnaîtra, au surplus, la surface (47) pour une surface de révolution dont l'axe, situé sur le plan (41), est donné par la double équation

$$\frac{x}{D}=\frac{y}{E}=\frac{z}{F}\ . \qquad (48)$$

L'orbite étant ainsi déterminée, on peut désirer de connaître la situation de la ligne des apsides, ainsi que les deux distances aphélie et périhélie. Or, la propriété de ces deux distances c'est que r y devient *maximum* ou *minimum*. Différentiant donc sous ce point de vue les équations (29, 41, 47), il viendra

$$\left.\begin{array}{l} xx'+yy'+zz'=0\ , \\ Ax'+By'+Cz'=0\ , \\ Dx'+Ey'+Fz'=0\ . \end{array}\right\} (49)$$

En éliminant entre ces équations deux quelconques de vitesses x', y', z', la troisième disparaît d'elle-même, et on obtient l'équation

$$(BF-CE)x+(CD-AF)y+(AE-BD)z=0\ . \qquad (50)$$

c'est donc là l'équation d'un plan qui contient la ligne des apsides; et, comme l'équation (41) est celle d'un plan qui la contient éga-

lement, il s'ensuit qu'elle se trouve déterminée par le système de ces deux équations, et conséquemment aussi par tout système de deux équations qui auront lieu en même-temps que celles-là. Il est d'ailleurs aisé de voir que les plans donnés par ces deux équations sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Or, si l'on élimine successivement entre elles deux quelconques des trois variables x, y, z, on obtiendra la double équation

$$\frac{x}{D}=\frac{y}{E}=\frac{z}{F}. \qquad (48)$$

Ainsi, la ligne des apsides n'est autre chose que l'axe de révolution de la surface (47); et l'on peut prendre pour ses équations

$$x=\frac{D}{F}z, \quad y=\frac{E}{F}z. \qquad (51)$$

On aura donc les coordonnées de l'aphélie et celles du périhélie, en combinant ces équations avec l'équation (47) mise sous la forme

$$(Dx+Ey+Fz+G^2)^2=\mu^2(x^2+y^2+z^2),$$

ce qui donnera, en ayant égard à l'équation (46),

$$x=\pm\frac{DG^2}{H(\mu\mp H)}, \quad y=\pm\frac{EG^2}{H(\mu\mp H)}, \quad z=\pm\frac{FG^2}{H(\mu\mp H)}. \qquad (52)$$

Il est évident que les signes supérieurs répondent à l'aphélie, et les signes inférieurs au périhélie.

Si ensuite on désigne respectivement par p et P les distances périhélie et aphélie, lesquelles ne sont autre chose que les distances de l'origine aux deux points que nous venons de déterminer; on aura, en ayant toujours égard à l'équation (46)

$$p=\frac{G}{\mu+H}, \quad P=\frac{G}{\mu-H}. \qquad (53)$$

Le demi-grand axe sera la demi-somme de ces deux quantités; de sorte qu'en le désignant par a, on aura

$$a=\tfrac{1}{2}(p+P)=\frac{G\mu}{\mu^2-H^2}. \qquad (54)$$

Désignant ensuite l'excentricité par E, et le rapport de l'excentricité au demi-grand axe par ι, on aura

$$E=a-p=\frac{GH}{\mu^2-H^2}\,,\quad \iota=\frac{E}{a}=\frac{H}{\mu}\,. \qquad (55)$$

La trajectoire sera donc une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant qu'on aura $H>\mu$, $H=\mu$ ou $H<\mu$. En particulier, elle sera un cercle, si l'on a $H=0$; ce qui emporte $D=0$, $E=0$, $F=0$, et donne $a=\frac{G}{\mu}$. Quant au paramètre, en le désignant par Π, on aura

$$\Pi=2(1+\iota)p=\frac{2G}{\mu}\,. \qquad (56)$$

Nous avons donc déterminé tout ce qui, dans les élémens de l'orbite, est indépendant du temps, et il ne nous reste plus qu'à fixer l'époque du périhélie. Pour y parvenir, remarquons d'abord qu'à l'époque t le rayon vecteur r fait avec les axes des angles dont les cosinus sont

$$\frac{x}{r}\,,\quad \frac{y}{r}\,,\quad \frac{z}{r}\,;$$

mais la ligne des apsides fait avec les mêmes axes des angles dont les cosinus sont

$$\frac{D}{H}\,,\quad \frac{E}{H}\,,\quad \frac{F}{H}\,;$$

d'où il suit qu'en désignant par φ l'anomalie vraie, on aura

$$\text{Cos.}\varphi=\frac{Dx+Ey+Fz}{Hr}\,. \qquad (57)$$

Les quantités ι, p et φ étant ainsi déterminées, on a, par les théories connues,

$$r=\frac{(1+\iota)p}{1+\iota\,\text{Cos.}\varphi}\,, \qquad (58)$$

d'où on conclut, par la différentiation,

$$r'=p\varphi'.\frac{(1+\epsilon)\text{Sin.}\varphi}{(1+\epsilon\text{Cos.}\varphi)^2}; \qquad (59)$$

mais nous avons (19), en faisant, comme ici, $l=0$,

$$r'=\epsilon\text{Sin.}\varphi.\sqrt{\frac{\mu}{(1+\epsilon)p}}; \qquad (60)$$

il viéndra donc, en égalant ces deux valeurs,

$$\varphi'=(1+\epsilon\text{Cos.}\varphi)^2\sqrt{\frac{\mu}{(1+\epsilon)^3p^3}}. \qquad (61)$$

Cette équation peut s'intégrer de plusieurs manières; mais, pour que son intégrale se présente sous une forme réelle, il faut varier les procédés, suivant qu'on a $\epsilon<1$, $\epsilon=1$, $\epsilon>1$.

1.° Dans le cas de $\epsilon<1$, qui est celui de l'*ellipse*, en posant d'abord

$$\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}.\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\varphi=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\psi, \qquad (62)$$

on a

$$T=t-\sqrt{\frac{p^3}{(1-\epsilon)^3\mu}}.(\psi-\epsilon\text{Sin.}\psi), \qquad (63)$$

et la constante T est l'époque du périhélie, puisque c'est ce que devient t lorsque φ est nul.

2.° Dans le cas de $\epsilon=1$, qui est celui de la *parabole*, on a immédiatement

$$T=t-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2p^3}{\mu}}\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\varphi.(3+\text{Tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi); \qquad (64)$$

et, pour les mêmes raisons que ci-dessus, la constante T sera l'époque du périhelie.

3.° Enfin, dans le cas de $e>1$, qui est celui de l'*hyperbole*, en posant d'abord

$$\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\,\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\varphi=\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\psi\,, \qquad (65)$$

on a

$$T=t-\sqrt{\frac{p^3}{(e-1)^3\mu}}\{e\,\text{Tang.}\psi-\text{Log.Tang.}\tfrac{1}{2}(\psi+\tfrac{1}{2}\varpi)\}\,; \qquad (66)$$

et T sera encore l'époque du périhélie.

Il est presque superflu de remarquer que, dans la formule (63), l'arc ψ doit être exprimé en parties du rayon pris pour unité, et que, dans la formule (66), il s'agit de logarithmes naturels.

A raison du double signe dont tout radical est susceptible, le calcul de l'époque du périhélie laisse incertain si l'époque t lui est antérieure ou postérieure, et nous avons admis ici des signes conformes à la dernière de ces deux hypothèses ; mais, comme il pourrait tout aussi bien arriver que le contraire eût lieu, il sera bon d'avoir quelque moyen de lever le doute où l'on pourrait être à cet égard.

En différentiant l'équation (47), il vient

$$Dx'+Ey'+Fz'=\mu r'\,: \qquad (67)$$

or, suivant que l'époque t précède celle du périhélie, coïncide avec elle ou la suit, r' doit être négatif, nul ou positif ; donc aussi suivant qu'on aura

$$Dx'+Ey'+Fz'\left\{\begin{array}{l}<0\ ,\ t\ \text{précédera}\ldots\\ =0\ ,\ t\ \text{coïncidera avec}\\ >0\ ,\ t\ \text{suivra}\ldots\ldots\end{array}\right\}\text{le périhélie}\,:$$

Tout

Tout ce qui précède est absolument indépendant de la direction des axes des coordonnées, pourvu seulement qu'ils soient rectangulaires ; mais si, pour nous conformer à l'usage constant des astronomes, nous supposons que les axes des x, des y et des z positifs sont respectivement dirigés vers l'équinoxe du printemps, le solstice d'été et le pôle boréal de l'écliptique, les équations (41 et 51) donneront

1.° Tang. Long. du nœud ascendant $=-\frac{A}{B}$;

2.° Tang. Inclinaison de l'orbite $=-\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{C}=-\frac{\sqrt{(G+C)(G-C)}}{C}$;

3.° Tang. Long. du périhélie (*sur l'écliptique*) $=\frac{E}{D}$. (*)

Il résulte clairement, de tout ce qui précède, que le problème de la recherche des élémens de l'orbite d'un astre se réduit, en dernière analise, à trouver pour un instant quelconque donné les coordonnées de son centre, par rapport à trois axes rectangulaires passant par le centre du soleil, et ses vitesses, pour le même instant, parallèlement à ces trois axes. Dans un autre article, nous essayerons de traiter ce dernier problème, du moins par approximation, et en partant d'observations peu distantes les unes des autres.

(*) Ce que les astronomes sont dans l'usage d'appeler *longitude du périhélie sur l'orbite*, n'est point proprement une *longitude*, suivant la définition de ce mot ; et cela est d'autant plus propre à induire en erreur que souvent ils désignent cette donnée, d'une physionomie assez bizarre d'ailleurs, sous la simple dénomination de *longitude du périhélie*.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Recherche du plan osculateur et du centre de courbure d'une ligne courbe, en un point donné;

Par M. CH. DUPIN, capitaine du génie maritime, correspondant de l'académie des sciences, institut de France.



On a inséré depuis peu, dans le *Bulletin des sciences*, la notice d'un mémoire, dans lequel M. HACHETTE traite la question suivante : *Trouver, pour l'un quelconque des points d'une courbe plane ou à double courbure, donnée dans l'espace par deux surfaces dont elle est l'intersection, le plan osculateur et le rayon de courbure de cette courbe ?*

Un illustre géomètre avait déjà traité cette question, par la considération des surfaces développables. M. Hachette y emploie des surfaces gauches, ce qui en complique nécessairement la solution, sans la rendre au fond différente de celle de M. Monge.

Lorsqu'une courbe est donnée, dans l'espace, par l'intersection de deux surfaces, ou de toute autre manière ; il faut, pour pouvoir lui appliquer les procédés de la géométrie descriptive, la projeter sur deux plans. Or, nous allons voir qu'alors la simple méthode des projections suffit pour résoudre complètement le problème dont il s'agit.

LEMME. Les centres de courbure, pour un même point P,

de toutes les projections orthogonales d'une même courbe, sur des plans conduits par sa tangente en ce point P, *sont tous situés sur une même droite, perpendiculaire au plan osculateur mené à la courbe primitive par ce même point* P.

Démonstration. Considérons l'un des cylindres projetans de la courbe proposée, ainsi que la sphère ayant pour grand cercle le cercle osculateur de la projection, base de ce cylindre. Ces deux surfaces auront, suivant la tangente en P, un contact du second ordre; d'où il résulte (*Dévelop. de géom.* pag. 36) que tout plan conduit par cette tangente, et conséquemment le plan osculateur, coupera la sphère et le cylindre suivant deux courbes ayant de même entre elles un contact du second ordre; mais ce dernier plan coupe la sphère suivant un cercle; donc ce cercle est le cercle osculateur de la courbe primitive en P; et conséquemment le centre de la sphère, centre de courbure de la projection, est aussi un des centres de courbure de la courbe primitive. Les centres de courbure de toutes les projections se trouvent donc être ainsi les centres d'une suite de sphères passant toutes par le cercle osculateur de la courbe primitive; ces centres sont donc sur une même droite perpendiculaire au plan de ce cercle et passant par son centre.

PROBLÈME. Construire le plan osculateur et le centre de courbure d'une courbe donnée en un point donné?

Solution. Ier *Cas*. Supposons d'abord que la courbe soit projetée orthogonalement sur deux plans quelconques, passant par sa tangente en P; on verra sur-le-champ, par ce qui précède :

1.° Que la droite joignant les centres de courbure des deux projections en P, sera, pour ce même point, le lieu des centres de courbure;

2.° Que le plan conduit par P, perpendiculairement à cette droite, sera le plan osculateur de la courbe en P;

3.° Enfin, que l'intersection de ce plan et de cette droite sera le centre de courbure de la courbe, pour le même point P.

Il n'est pas difficile de voir, d'après cela, ce qu'il y aurait à

faire, si les deux plans de projection, au lieu de passer par la tangente, lui étaient simplement parallèles.

II.me Cas. Supposons présentement que les plans de projection soient quelconques par rapport à la tangente en P; soient T cette tangente et C la courbe (*); de manière que C_h, C_v soient les projections de la courbe T_h, T_v celles de sa tangente, et enfin, P_h, P_v celles du point de contact. Soient de plus H et V les rayons de courbure de C_h et C_v, en P_h et P_v.

Soit menée la droite de projection P_hP_v et soient menées à cette droite deux parallèles quelconques qui en soient équidistantes; et concevons que T_h et T_v représentent les longueurs des parties de tangentes interceptées entre ces parallèles; P_h et P_v seront ainsi les milieux respectifs de T_h et T_v.

Soit menée à T_h, du côté de la concavité de C_h, une parallèle $(AB)_h$, qui en soit distante d'une quantité troisième proportionnelle à H et à $\frac{1}{2}T_h$. Soient O_h le point où cette droite $(AB)_h$ coupe P_hP_v; et A_h, B_h les points où elle coupe les deux parallèles à P_hP_v.

Soit pareillement menée à T_v, du côté de la concavité de C_v, une parallèle $(AB)_v$, qui en soit distante d'une quantité troisième proportionnelle à V et à $\frac{1}{2}T_v$. Soient O_v le point où cette droite $(AB)_v$ coupe P_hP_v, et A_v, B_v les points où elle coupe les deux parallèles à P_hP_v.

Alors le plan conduit par P et par AB sera le plan osculateur de la courbe C en P; et son rayon de courbure au même point sera une troisième proportionnelle à la distance du point P à AB et à la moitié de la longueur de cette droite.

Démonstration. Concevons que, sur O_hP_h et O_hA_h, comme demi-

(*) Nous emploirons ici une notation commode, dont nous avons déjà fait l'essai, dans nos *Développemens de géométrie*. Elle consiste à représenter les projections *horizontale* et *verticale* des divers objets, considérés dans l'espace, par les lettres même qui représentent ces objets, mais affectées des indices respectifs *h* et *v*.

diamètres conjugués on construise une ellipse E_h et que sur O_vP_v et O_vA_v, pris aussi comme demi-diamètres conjugués, on construise une autre ellipse E_v; ces deux ellipses se trouveront ainsi comprises entre les deux parallèles à P_hP_v, qui en seront des tangentes communes. De plus, d'après la construction E_h et E_v seront respectivement osculatrices de C_h et C_v, en P_h et P_v (*).

(*) Ceci est fondé sur le théorème que voici :

THÉORÈME. Le rayon de courbure d'une ellipse, en un quelconque de ses points, est troisième proportionnel à la distance de ce point au diamètre parallèle à sa tangente, et à la moitié de ce diamètre.

Ce théorème, dont M. Dupin fait un grand usage dans ses *Développemens de géométrie*, se déduit fort simplement de la théorie qu'il y expose (voyez la page 29 de cet ouvrage). Il peut aussi se démontrer directement comme il suit.

On a vu (*Annales*, tom. VI, pag. 229) qu'en prenant respectivement pour axes des x et des y la tangente et la normale en un point quelconque d'une ligne du second ordre, l'équation de cette courbe était de la forme

$$Nx^2+2Ry(y-Ax-N)=0\ ; \qquad (1)$$

R étant le rayon de courbure qui répond à l'origine.

Il est connu d'ailleurs (*Annales*, tom. VI, pag. 160) que les dérivées de cette équation, prises successivement par rapport à x et à y, sont les équations de deux diamètres, c'est-à-dire, de deux droites qui se coupent au centre de la courbe ; de sorte qu'en désignant par α et β les coordonnées de ce centre, on doit avoir.

$$N\alpha-AR\beta=0\ , \qquad 2\beta-A\alpha-N=0\ ; \qquad (2)$$

d'où on tire

$$A=\frac{2\alpha\beta}{R\beta+\alpha^2}\ , \qquad N=\frac{2R\beta^2}{R\beta+\alpha^2}\ ; \qquad (3)$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation (1), elle devient

$$(\beta x-\alpha y)^2=R\beta y(2\beta-y)\ . \qquad (4)$$

Cela posé, considérons les ellipses E_h et E_v comme les bases de deux cylindres de projections; ces deux cylindres ayant les mêmes plans tangens, en A et B, auront une commune section plane, passant par A, B, P, et dont E_h et E_v seront les projections (*Mém. sur les contacts des sphères et des surfaces du second degré.* DUPIN).

Cette intersection des deux cylindres oscule nécessairement C en P; d'où il suit que le plan conduit par P et AB est osculateur de C en P.

Et, comme le rayon de courbure en P de l'intersection plane des deux cylindres est aussi celui de la courbe C au même point; il s'ensuit que ce dernier est troisième proportionnel à la distance de P à AB et à la moitié de la longueur de cette droite.

Voilà donc la courbe exprimée en fonction du rayon de courbure et des coordonnées du centre.

L'équation du diamètre parallèle à la tangente, ou à l'axe des x, est $y=\beta$; en la combinant avec l'équation (4), il vient

$$(x-\alpha)^2=R\beta\,; \qquad (5)$$

équation qui fera connaître les deux extrémités du diamètre, et qui donne

$$x=\alpha\pm\sqrt{R\beta}\,.$$

Si l'on appelle $2a$ la longueur entière du diamètre dont il s'agit, a sera la demi-différence de ces deux valeurs; c'est-à-dire qu'on aura

$$a=\sqrt{R\beta} \quad \text{ou} \quad \div\beta:a:R\,;$$

conformément à l'énoncé du théorème.

J. D. G.

Remarque. Il est un cas particulier qui mérite d'être remarqué : c'est celui où la tangente T à C, par le point P, se trouve dans un plan perpendiculaire à la fois aux deux plans de projection. Il ne suffit plus alors que E_t et E_v aient avec C_t et C_v un contact du second ordre, pour que E oscule C en P. Il est nécessaire, dans ce cas, que les deux contacts soient du troisième ordre, ainsi qu'il serait facile de le démontrer.

Si de plus, dans ce même cas, on suppose le plan osculateur de la courbe proposée parallèle à l'intersection des deux plans de projection ; le rayon de courbure de cette courbe se trouvera immédiatement donné par ce théorème, que nous avons exposé ailleurs (*Dévelop. de géom.*) : *Si l'on projette une courbe sur deux plans à angle droit, parallèles au rayon de son cercle osculateur en un point* P ; *au même point* P, *la somme des rayons de courbure des deux projections de cette ligne, est égale au rayon même du cercle osculateur de la courbe proposée.*

Nous ne saurions terminer sans signaler à l'impartiale justice des géomètres la phrase suivante, qui termine la notice sur le mémoire de M. Hachette : « L'application de ces diverses propositions » est de la plus haute importance dans les arts graphiques ; » elle donne la mesure de la quantité de courbure des lignes et » des surfaces, dont on n'a déterminé, *jusqu'à présent*, que la » direction, par les tangentes et les plans tangens. ».

Sur les plans osculateurs et les rayons de courbure des lignes planes ou à double courbure, qui résultent de l'intersection de deux surfaces;

Par M. Hachette.

Extrait du Bulletin des sciences. (*)

De toutes les propositions d'analise appliquées à la géométrie, les plus importantes sont relatives à la courbure des lignes et des surfaces. En les démontrant, par des considérations dégagées de tout calcul, on augmente le domaine de la géométrie, et les théories les plus abstraites deviennent applicables aux arts les plus usités. Le mémoire de M. Hachette conduit à une règle générale pour construire graphiquement, avec le seul secours de la géométrie descriptive, les plans osculateurs, et les rayons de courbure de lignes à double ou simple courbure, qui résultent de l'intersection de deux surfaces. Cette règle se déduit des propositions suivantes :

1.° Une surface *réglée* (**) (c'est ainsi que l'auteur nomme la

(*) M. Dupin, dans le précédent article, ayant fait mention de celui-ci; nous avons pensé faire plaisir à ceux de nos lecteurs qui n'ont point sous la main le *Bulletin des sciences*, de le transcrire ici tel qu'on l'y rencontre.

J. D. G.

(**) Quelques surfaces de cette famille, qu'on emploie dans les arts graphiques, surface

surface non développable engendrée par une droite mobile, quelle que soit d'ailleurs la loi du mouvement), étant coupée par un plan; qui passe par une droite de la surface, les points d'intersection de ce plan et de toutes les autres droites de la même surface, forment une courbe : le point de rencontre de cette courbe et de la droite de la surface contenue dans le même plan, est un point de contact de ce plan et de la surface réglée; en sorte que le même plan est à la fois tangent et sécant.

2.° La normale en un point de la courbe qui résulte de l'intersection d'une surface et d'un plan, est la projection orthogonale de la normale à la surface au même point, sur le plan de la courbe.

3.° Une surface étant coupée par un plan, la surface réglée, lieu des normales menées par tous les points de la courbe plane, et la surface cylindrique qui a pour section droite (*) la développée de la courbe, sont circonscrites l'une à l'autre.

4.° Une ligne à double courbure étant l'intersection de deux surfaces, on peut la considérer comme appartenant aux deux surfaces réglées, lieux des normales aux surfaces proposées, qu'on mènerait par tous les points de la courbe à double courbure; si, par un point quelconque de cette courbe, on mène un plan qui lui soit perpendiculaire en ce point, ou plutôt perpendiculaire à sa tangente, ce

---

se nomment *surfaces gauches*, ou *plans gauches.* Le mot *réglée* signifie qu'on peut appliquer l'arête d'une règle sur toutes les droites dont la surface se compose. M. Hachette a démontré précédemment, 1.° que la surface lieu des normales menées par tous les points d'une droite, prise à volonté sur une surface réglée, était l'une des cinq surfaces du second degré qu'il a nommée *paraboloïde hyperbolique*; 2.° que, dans le nombre infini de surfaces du second degré, dites *hyperboloïdes à une nappe*, qui peuvent toucher une surface réglée suivant une droite de cette surface, et avoir avec elle un contact du premier ordre, il y a un de ces hyperboloïdes, dont le contact suivant la même droite est du second ordre.

(*) On nomme *section droite* d'un cylindre, la section perpendiculaire à ses arêtes.

(*Notes du* Bulletin des sciences.)

plan touchera les deux surfaces réglées en deux points, remarquables par cette propriété, que leurs projections sur un plan quelconque, passant par la tangente à la courbe à double courbure, sont les centres de courbure des deux sections faites par ce plan sur les surfaces proposées. Menant, par le point de la courbe à double courbure que l'on considère, un plan perpendiculaire à la droite qui joint les deux points de contact des surfaces réglées et du plan normal à cette courbe, ce plan perpendiculaire sera le plan osculateur de la courbe, et il coupera la droite à laquelle il est perpendiculaire, en un point, qui sera le centre du cercle osculateur.

Il suit évidemment de la troisième proposition, que les cercles osculateurs de toutes les sections d'une surface, dont les plans passent par une même tangente, appartiennent à une sphère, proposition démontrée par Meusnier; et, ce qui n'est pas moins évident, toutes les sections obliques dont les plans font, avec une normale à la surface, le même angle, ont un même rayon de courbure, lorsque les sections normales perpendiculaires aux sections obliques, ont même centre de courbure.

Ayant construit graphiquement les rayons de courbure de trois sections quelconques, passant par une même normale d'une surface, M. Hachette fait observer qu'on en déduirait facilement les rayons de courbure et les plans osculateurs des lignes de courbure, dont Monge a le premier donné les équations. En effet, on calculerait ces rayons de courbure, *maximum* et *minimum*, au moyen de la formule d'Euler

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \text{Sin.}^2 A + \frac{1}{r} \text{Cos.}^2 A \ ;$$

R et r étant les rayons de courbure de la surface, et ρ le rayon de courbure d'une section normale, dont le plan fait avec le plan osculateur de la ligne de courbure l'angle A (*). (Voyez la *Correspondance sur l'école polytechnique*, tome III, page 134).

(*) M. Hachette observe à ce sujet que le théorème de M. Dupin, qui consiste en ce que *les tangentes aux deux lignes de courbure, en un point quel-*

L'application de ces propositions est de la plus haute importance dans les arts graphiques ; elle donne la mesure de la quantité de courbure des lignes et des surfaces, dont on n'a déterminé, jusqu'à présent, que la direction, par les tangentes et les plans tangens.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Recherche de la ligne du second ordre qui en touche trois autres données, sur une surface du même ordre (*) ;

Par M. J. B. DURRANDE.

SOIENT deux lignes du second ordre tangentes l'une à l'autre, sur une surface du même ordre, et soient considérées ces deux courbes comme les lignes de contact de la surface avec deux surfaces coniques circonscrites.

---

conque d'un hyperboloïde à une nappe, divisent en deux parties égales l'angle des deux droites de la surface, qui passent par le même point, se déduit très-simplement de la formule d'Euler. En effet, ϱ étant infini, pour les deux sections normales, on a

$$\frac{1}{R}\text{Sin.}^2A+\frac{1}{r}\text{Cos.}^2A=0\ ;$$

équation qui est satisfaite quel que soit le signe de A ; donc cette équation appartient tout aussi bien à la section normale, dont le plan fait avec le plan de la ligne de courbure un angle égal à A, qu'à la section dont le plan fait avec ce dernier un angle —A, ou dont l'inclinaison sur ce dernier est la même que pour l'autre plan, mais qui est situé du côté opposé.

(*) Cette question a déjà été traitée par M. Chasles, dans la *Correspondance sur l'école polytechnique* (tom. III, n.° 1.er, janvier 1814, pag. 16) ; mais, quelque ingénieuse que soit la solution de ce géomètre, elle n'ôte rien, comme on va le voir, au mérite de celle de M. Durrande.

J. D. G.

Le point de contact pourra également être considéré comme une ligne du second ordre suivant laquelle la surface est touchée par une troisième surface conique circonscrite, laquelle ne sera autre que le plan tangent en ce point, qui sera en même temps le sommet de cette troisième surface conique.

Les plans des lignes de contact passent tous trois par une même droite, laquelle est la tangente commune aux deux courbes ; donc, par la propriété connue des pôles, les trois sommets doivent être en ligne droite ; c'est-à-dire, en d'autres termes, que la droite qui joint les sommets de nos deux surfaces coniques est tangente à la surface du second ordre, et contient le point de contact des deux courbes (*) ; cette droite est donc une arête commune aux deux surfaces coniques.

Ainsi, *lorsque deux lignes du second ordre, tracées sur une surface du même ordre, sont tangentes l'une à l'autre, les surfaces coniques circonscrites, dont ces lignes sont les lignes de contact avec la surface du second ordre, ont une arête commune, laquelle passe par le point de contact de deux courbes* ; et il est aisé de voir que, réciproquement, *si deux surfaces coniques circonscrites à une même surface du second ordre ont une arête commune, leurs lignes de contact avec cette surface seront tangentes l'une à l'autre au point où cette même surface sera touchée par l'arête commune.*

Cela posé ; soient trois lignes du second ordre, données et quelconques sur une surface du même ordre. Considérons ces trois lignes comme les lignes de contact de la surface avec trois surfaces coniques circonscrites ; ces surfaces coniques se couperont en quelque point. Considérons ce point comme le sommet d'une quatrième surface conique circonscrite ; il est clair que cette surface conique se trouvera avoir une arête commune avec chacune des trois autres ; donc,

(*) Il est aisé de reconnaître cette droite pour la *conjuguée* de la tangente commune aux deux courbes.

J. D. G.

par ce qui a été dit plus haut, la ligne de contact avec la surface du second ordre sera tangente à la fois aux trois lignes du second ordre données sur cette surface. On a donc le théorème que voici :

THÉORÈME. *La ligne du second ordre qui, sur une surface du même ordre, touche trois autres lignes du second ordre, données sur cette surface, n'est autre chose que la ligne de contact de la surface du second ordre avec la surface conique circonscrite dont le sommet serait à l'intersection des trois surfaces coniques qui auraient pour lignes de contact avec la même surface du second ordre les trois lignes du même ordre données sur cette surface* (*).

Chacune des trois surfaces coniques dont l'intersection doit déterminer le sommet de la quatrième ayant deux nappes ; il s'ensuit que huit lignes différentes du second ordre peuvent résoudre le problème dont il s'agit ici.

Du théorème qui vient d'être démontré on déduit le suivant, comme cas particulier :

THÉORÈME. *Le cercle qui, sur une sphère, en touche trois autres donnés, n'est autre chose que la ligne de contact de la sphère avec le cône circonscrit qui aurait son sommet à l'intersection de trois autres cônes touchant cette sphère suivant les cercles donnés.*

Si quelqu'une des données du problème était un grand cercle ou un point, le cône qui lui serait relatif se réduirait à un cylindre circonscrit ou à un plan tangent. Les dix problèmes qui peuvent naître de cette variété de données se trouvent donc tous résolus par ce qui précède.

(*) Il n'est point inutile de remarquer, comme moyen propre à simplifier la construction que les trois surfaces coniques se coupent deux à deux suivant une courbe plane, dont le plan passe par la commune section des plans de leurs lignes de contact. Cette proposition, ainsi qu'une autre, dont elle n'est qu'un cas particulier, ont été démontrées par M. Chasles, dans l'ouvrage déjà cité (Tome III, pag. 14 et 339).

J. D. G.

On voit en particulier, 1.° que le cercle circonscrit à un triangle sphérique est la ligne de contact de la sphère avec le cône circonscrit qui a son sommet à l'intersection des plans qui touchent cette sphère aux trois sommets du triangle ; 2.° que le cercle circonscrit au même triangle est celui suivant lequel la sphère est touchée par la surface conique circonscrite dont le sommet est à l'intersection des surfaces cylindriques qui touchent la même sphère suivant les trois côtés du triangle.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème physico-mathématique proposé à la page 320 du VI.e volume de ce recueil ;

Par un Abonné.

Problème. *A quelle distance du centre d'une sphère, dont la surface est uniformément lumineuse, un point en reçoit-il la plus grande lumière possible ?*

Solution. Soient C le centre de la sphère, r son rayon, P le point cherché, et faisons CP$=z$.

Si l'on fait de P le sommet d'un cône circonscrit, ce cône aura avec la sphère une ligne de contact dont le plan divisera sa surface en deux calottes, et celle qui sera tournée vers le point P lui enverra seule de la lumière. Le plan de la base de cette calotte sera perpendiculaire à CP, et sa distance au point P sera évidemment $\frac{z^2-r^2}{z}$.

Si l'on conçoit une zône infiniment mince dont les deux bases soient perpendiculaires à CP; en appelant x la distance de l'une de ces bases au point P; sa surface sera $2\varpi r dx$. Tous les points de cette zône étant à une même distance $\sqrt{r^2-z^2+2zx}$ du point P, lui enverront conséquemment une même quantité de lumière; de sorte que la lumière totale reçue par le point P, de tous les points de cette zône, sera proportionnelle à son étendue divisée par le quarré de la distance commune de tous ses points à ce point P. Cette lumière sera donc

$$\frac{2\varpi m r dx}{r^2-z^2+2zx},$$

m étant une constante relative à l'intensité de la lumière qui s'échappe de chacun des points de la surface de la sphère.

On aura donc la lumière totale reçue par le point P en intégrant cette formule, entre $x=z-r$ et $x=\frac{z^2-r^2}{z}$; z étant regardé comme constant. On obtient ainsi

$$\frac{\varpi m r}{z}\text{Log.}\frac{z+r}{z-r}, \quad \text{ou} \quad \varpi m r \text{Log.}\sqrt[z]{\frac{z+r}{z-r}}.$$

Si présentement, dans cette formule, on regarde z comme variable, on voit qu'elle devient nulle en faisant z infini, et qu'elle croît sans cesse, à mesure que z décroît, et devient enfin infinie, lorsqu'on a $z=r$.

Ainsi, le point P recevra la plus grande lumière possible, lorsqu'il sera sur la sphère même. Ce résultat, contraire à ce que l'énoncé de la question paraissait insinuer, pourrait d'abord sembler paradoxal; en ce que, lorsque le point P est sur la sphère même, il n'est plus éclairé que par une calotte infiniment petite. Mais on peut remarquer que l'aire de la calotte qui éclaire le point P est en général

$$2\pi r^2\left(1-\frac{r}{z}\right);$$

que le quarré de la distance de son pôle au point P est

$$z^2\left(1-\frac{r}{z}\right)^2;$$

de sorte que, lorsqu'elle se réduit à ce pôle, c'est-à-dire, lorsqu'on a $z=r$ ou $\frac{r}{z}=1$, ou enfin $1-\frac{r}{z}=0$, la lumière reçue devient

$$\frac{2\pi m r^2.0}{r^2.0^2}=\frac{2\pi m}{0}=\infty,$$

du moins si m n'est point infiniment petit.

Tout ce que nous venons de dire de la lumière doit s'appliquer sans restriction à la chaleur.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Géométrie.

Trois cercles ont le même centre; leurs rayons sont a, b, c; leurs plans font deux à deux des angles α, β, γ; quelle est l'équation de la surfaee gauche engendrée par une droite mobile qui passe perpétuellement par les circonférences de ces trois cercles?

GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE.

Mémoire sur la théorie générale du tracé des routes,

Faisant suite aux *développemens de géométrie* ;

Par M. Ch. Dupin, correspondant de l'institut, capitaine du génie maritime, etc.

Rapport sur ce mémoire, fait à la classe des sciences physiques et mathématiques ;

Par M. Girard.

M. Dupin, correspondant de la classe, lui a présenté un mémoire ayant pour titre : Développemens de géométrie. *Applications. Théorie générale du tracé des routes.* La classe nous a chargés, M. *Prony* et moi, de lui en faire un rapport.

Quelle que soit la ligne parcourue, sur un terrain quelconque, par des hommes ou des animaux qui traînent un fardeau, la force instantanée qu'ils transmettent à cette masse, après la production de la vitesse, qui doit rester uniforme, est contre-balancée par la résistance que des obstacles de différente nature opposent au mouvement ; de sorte que, la vitesse uniforme propre à l'espèce de moteur employé étant supposée connue, la théorie du tracé des

routes est indépendante de toutes considérations de dynamique, et rentre entièrement dans le domaine de la géométrie.

Lorsque les moteurs doivent exercer leur action sur un plan horizontal ou dont l'inclinaison est très-petite, il est évident que la route la plus avantageuse, c'est-à-dire, celle qui peut être parcourue dans le moindre temps, et par conséquent aux moindres frais possibles, est la ligne droite qui joint le point de départ et le point d'arrivée. M. Dupin donne à ce chemin rectiligne la dénomination de *route directe*.

Mais, lorsque le sol sur lequel on doit cheminer a une configuration telle que la ligne la plus courte tracée entre les points de départ et d'arrivée présente, dans toute ou partie de sa longueur, une inclinaison plus forte que la plus grande suivant laquelle les moteurs employés peuvent agir avec avantage; on est alors obligé de se détourner de cette route directe, pour en suivre d'autres dont la pente soit plus douce, et que M. Dupin désigne sous le nom de *routes obliques*.

On conçoit que l'on peut arriver d'un point à un autre, sur une surface quelconque, par une infinité de routes obliques de pentes différentes. M. Dupin pose en principe que l'on doit choisir, entre ces routes, celle dont la pente est égale à la plus grande suivant laquelle une route directe puisse être parcourue; et il dérive de cette condition la théorie générale qu'il expose.

Il fait remarquer d'abord qu'une route directe étant la ligne la plus courte que l'on puisse tracer entre deux points donnés sur une surface, cette route jouit de la propriété que tous ses plans osculateurs sont, aux points d'osculation, perpendiculaires à la surface sur laquelle elle est tracée.

Il fait remarquer ensuite que, la pente d'une route oblique étant constante, si l'on suppose qu'une ligne droite verticale se meuve sur cette route, elle la coupera sous un angle constant, en engendrant une surface cylindrique sur laquelle la route oblique présentera une véritable hélice.

Ces deux propriétés de la route directe et de la route oblique offrent un moyen facile de les rectifier géométriquement ; en effet elles se développent en lignes droites, la première sur une surface développable, tangente au terrain dans toute l'étendue de la route, la seconde sur une surface cylindrique qui coupe le terrain sous l'angle constant de la pente limite.

Le tracé des routes obliques dépendant, comme on voit, de cette pente limite, il est indispensable qu'elle soit déterminée préalablement.

M. Dupin remarque que l'expérience seule peut y conduire, et qu'elle doit varier suivant la manière d'effectuer les transports, soit à dos d'hommes, soit à dos de cheval ou de mulet, soit par des voitures attelées de bœufs ou de chevaux.

Après ces notions générales, M. Dupin passe à la détermination graphique d'une route dont les points de départ et d'arrivée sont fixes, ce qui exige, avant tout, que l'on définisse graphiquement le terrain sur lequel elle doit être pratiquée.

Cette définition graphique s'obtient en traçant les intersections de la surface de ce terrain par des plans horizontaux également espacés dans la direction verticale.

Si l'on suppose ces intersections très-rapprochées les unes des autres, et qu'à partir d'un point donné sur la surface, on trace une ligne qui les coupe perpendiculairement, cette ligne sera, comme on sait, une des lignes de plus grande pente de la surface.

Or, il est évident qu'à partir d'un point quelconque de cette ligne de plus grande pente, on peut tracer, à droite et à gauche, deux routes obliques d'une pente égale.

Il n'est pas moins évident que les portions de route oblique comprises entre deux plans de niveau ont le même développement ; d'où il suit que, pour parvenir d'un de ces plans à l'autre, quelle que soit la portion de la verticale qu'ils interceptent, toutes les routes obliques sont indifférentes, soit qu'elles se dirigent dans le même sens par rapport aux lignes de plus grande pente, soit qu'elles

aient des points de rebroussement alternatifs ; et forment des zig-zags ou lacets, sur la surface du terrain.

Il est évident, enfin, qu'entre les mêmes sections horizontales, toute autre route d'inclinaison variable, mais dont la plus grande pente n'en surpassera pas la limite, sera plus longue que la route oblique dout cette limite même est la pente constante.

Si donc il ne s'agissait que de passer d'un plan de niveau à un autre plan de niveau plus élevé, la question aurait une infinité de solutions : ce n'est que par la fixation des points extrêmes de la route que le problème devient déterminé.

Il faut considérer maintenant que, quand il s'agit de franchir une chaîne de montagnes, par une route oblique, cette route doit se raccorder, de la manière la plus avantageuse, avec la portion de route directe pratiquée dans la plaine sur laquelle cette chaîne de montagne s'élève. Or, l'avantage consiste ici à rendre la plus courte possible la portion de route en plaine, à partir d'un point déterminé. Il s'agit, par conséquent, de trouver, sur la surface du terrain, l'extrémité supérieure de cette route directe, extrémité qui se trouvera en même temps l'origine inférieure de la route oblique.

La surface des éminences qui couvrent la terre se raccorde ordinairement avec la surface des plaines adjacentes, dans des plans à peu près horizontaux ; de sorte qu'en général, la projection verticale des lignes de plus grande pente présente des courbes qui tendent à devenir tangentes à l'horizon, c'est-à-dire, en d'autres termes, que la pente des élémens successifs de ces lignes diminue de plus en plus, à mesure que l'on descend.

Que l'on suppose tracée sur la surface de la montagne, une suite de lignes de plus grande pente, infiniment près les unes des autres, et qu'on lie par une courbe tous les élémens de ces différentes lignes dont l'inclinaison est précisément égale à la limite des pentes ; il est évident que cette courbe sera elle-même la limite des routes obliques que l'on pourra tracer sur la surface du sol. Ce sera par conséquent en un point de cette courbe que la route

directe et la route oblique devront se raccorder. Ce point se détermine d'ailleurs par la condition que la route directe et la route oblique s'y confondent avec la ligne de plus grande pente, c'est-à-dire, y coupent perpendiculairement l'intersection horizontale du terrain.

Telles sont les considérations générales qui conduisent l'auteur à la solution de divers problèmes sur le tracé des routes, entre deux points donnés; mais, lorsqu'il y a plusieurs objets à transporter d'un certain nombre de points de départ à un nombre égal de points d'arrivée, on conçoit que les solutions trouvées par l'auteur ne peuvent avoir d'application que lorsqu'on a donné les points de départ et d'arrivée qui doivent se correspondre mutuellement; et cette détermination exige des considérations nouvelles.

M. Dupin démontre d'abord que le nombre des combinaisons de toutes les routes qu'on peut faire suivre aux différens objets à transporter qui est égal au produit des nombres naturels, depuis l'unité jusqu'au nombre de ces objets, se réduit à deux; et il fait voir aisément que si, en joignant chaque point de départ aux deux points d'arrivée, on obtient deux systèmes de routes, celui de ces systèmes dans lequel les routes ne se croisent pas est nécessairement le plus avantageux; proposition qui, étendue au cas plus général d'un nombre indéfini de points de départ et d'arrivée, le conduit à faire voir que le système de route le plus convenable dans ce cas est celui qui lie le premier point de départ au premier point d'arrivée, le deuxième au deuxième, et ainsi de suite; de manière qu'aucune de ces routes ne se croise dans l'espace contenu entre les lignes qui joignent d'un côté tous les points de départ et de l'autre côté tous les points d'arrivée. Le mémoire est terminé par quelques applications de ces propositions aux évolutions et mouvemens des troupes de différentes armes.

En traitant d'une manière générale, et pour ainsi dire abstraite, du tracé des routes, l'auteur ne s'est point dissimulé que des circonstances locales, des convenances administratives, ou des motifs

d'économie doivent apporter des modifications fréquentes au système que la théorie peut indiquer. Ainsi, dans les routes en plaine, par exemple, il importe souvent beaucoup moins d'arriver d'une de leurs extrémités à l'autre par le plus court chemin, qu'il n'est utile de l'allonger, en se rapprochant du plus grand nombre possible de lieux habités. Le passage des rivières dans l'endroit le plus commode, la nécessité d'éviter des marais ou des fondrières, et beaucoup d'autres causes obligent souvent de s'écarter de la ligne qu'il faudrait suivre, si l'on n'avait égard qu'à la configuration extérieure du terrain.

Quant à la mise en pratique des principes développés par M. Dupin, sur le tracé des routes obliques, elle exige la connaissance de la plus forte pente sur laquelle les transports peuvent être effectués sur les routes directes, par les différens moteurs que l'on est dans le cas d'employer. Mais ici, comme sur beaucoup d'autres matières, l'expérience n'a point suffisamment éclairé la théorie; il n'a été publié du moins aucune série de faits assez nombreuse pour pouvoir en déduire cette limite d'une manière certaine et générale.

D'un autre côté, quand bien même on serait parvenu à la déterminer d'une manière sûre, serait-il convenable de conserver une telle pente dans le développement entier de la route? Cette disposition, que l'on devrait sans doute adopter, si les transports s'effectuaient à l'aide de contre-poids ou autres moteurs inanimés, ne doit-elle pas être modifiée, lorsque le mouvement est transmis par l'action de la force musculaire?

Si l'on considère, en effet, que l'effort des animaux employés aux charrois est d'autant plus grand qu'ils sont obligés de cheminer sur des pentes plus rapides, et que leur fatigue s'accroît depuis le moment où ils se mettent en marche jusqu'à celui où se termine leur journée de travail; ne s'élève-t-il pas naturellement la question de savoir si, au lieu de distribuer uniformément la pente d'une route oblique ascendante entre ses deux extrémités, il ne convient pas mieux de diminuer cette pente suivant une certaine loi, depuis le

point du départ, au commencement de la journée, jusqu'à la station où elle finit, de manière que les efforts des moteurs se proportionnent à chaque instant à l'état actuel de leurs forces?

Les grandes routes qui ont été ouvertes dans ces derniers temps, à travers la chaîne des Alpes, par le Simplon, le Mont-Cenis et Fénestrelle, ont fourni aux ingénieurs français l'occasion d'acquérir une grande expérience; et cependant les plus habiles diffèrent encore entre eux d'opinion sur la question que nous venons d'énoncer.

Au reste, quelque hypothèse que l'on adopte à cet égard, la géométrie pourra toujours s'en emparer; et ce ne sera jamais qu'en employant les moyens qu'elle fournit que l'on parviendra à donner au tracé des routes le degré de perfection dont cette opération est susceptible.

Les différens ouvrages que M. Dupin a présentés à la classe ont prouvé, depuis long-temps, qu'il réunit les connaissance et les talens nécessaires pour s'aider avantageusement de la théorie et de l'observation, dans les travaux qu'il entreprend. Nous pensons que le mémoire dont nous venons de rendre compte est une application utile de la *géométrie descriptive* à un objet fort important, et qu'à ce titre il mérite l'approbation de la classe, et l'insertion dans le recueil des savans étrangers.

Signé DE PRONY, GIRARD, *rapporteur*.

La classe approuve le rapport et en adopte les conclusions.

Certifié conforme à l'original, par le secrétaire perpétuel, chevalier de la légion d'honneur,

Signé DELAMBRE.

ASTRONOMIE.

Calcul de l'éclipse de soleil du 19 *de novembre* 1816, *pour* Strasbourg *et* Nismes.

Par M. le professeur Kramp, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.

1. Dans un mémoire inséré à la page 133 du VI.e volume de ce recueil, et dont la suite se trouve à la page 349 du même volume, j'ai donné une solution nouvelle de ce problème : *Déterminer, pour un endroit quelconque du globe terrestre, et pour une époque comprise entre les limites de la durée d'une éclipse de soleil, le lieu apparent du centre de la lune sur le disque solaire ?* Dans cette solution, je n'ai fait usage ni des parallaxes, ni du méridien universel, ni des ombres et pénombres ; et la question est plutôt traitée comme un simple problème de géométrie que comme une question d'astronomie. Dans le mémoire actuel, je me propose de résumer les procédés pratiques que fournit cette solution, d'en comprendre les formules essentielles dans le moindre espace possible, et d'en faire enfin l'application à l'éclipse de soleil qui est attendue le 19 de novembre de cette année, telle qu'elle doit paraître aux observateurs de Strasbourg et de Nismes.

2. Concevons, par le centre du disque solaire, considéré comme un plan, deux axes rectangulaires, l'un des q tangent à l'écliptique, dans la direction orientale, et l'autre des r, tangent au cercle de déclinaison

déclinaison qui passe par le centre du soleil, et dirigé vers l'hémisphère boréal.

3. Concevons, en outre, par le centre de la terre, trois axes rectangulaires, savoir : un axe des x, dirigé vers le centre du soleil, un axe des y, parallèle à celui des q, et enfin un axe des z, parallèle à celui des r, et dirigé conséquemment vers le pôle boréal de l'écliptique.

4. Concevons enfin, toujours par le centre de la terre, trois autres axes rectangulaires, savoir : un axe des X, dirigé vers l'équinoxe du printemps, un axe des Y, dirigé vers le 90.me degré de l'équateur, et enfin un axe des Z, dirigé vers le pôle boréal de ce dernier cercle.

5. Ces préliminaires établis, soient adoptées les notations suivantes:

C, rayon de la terre;

A, distance de la terre au soleil;

B, distance de la terre à la lune;

ω, obliquité de l'écliptique;

λ, latitude de l'observateur, supposée boréale;

D, sa longitude, supposée orientale;

t, le temps, exprimé en fraction du jour, et compté depuis un instant quelconque, compris entre les limites de la durée de l'éclipse;

α, longitude du soleil, pour l'époque t;

a, a', ses ascensions droites, pour les midi vrais qui précèdent et suivent immédiatement l'éclipse, comptés l'un et l'autre au premier méridien;

q', r', coordonnées, pour l'époque t, et sur le plan du disque solaire, du centre de la lune, vu du centre de la terre, et exprimées en secondes;

q, r, mêmes coordonnées, à la même époque, pour l'obser-

vateur placé à la surface de la terre, exprimées également en secondes ;

x, y, z, coordonnées de cet observateur pour le premier système d'axes ;

X, Y, Z, coordonnées du même observateur prises par rapport au second système ;

ω, abréviation de $360°+a'-a$;

k, abréviation de $\frac{A-B}{A\text{Tang.}1''}$;

$\mu=a+D+\omega t$, ascension droite du milieu du ciel pour l'observateur, à l'époque t.

6. Cela posé; pendant la durée de l'éclipse, les coordonnées géocentriques q', r' peuvent être considérées comme variant proportionnellement au temps; elles auront donc sensiblement la forme

$$q'=M+mt\ ,\quad r'=N+nt\ ;$$

et les coefficiens M, N, m, n, seront immédiatement donnés par les tables.

7. On calculera ensuite les coordonnées X, Y, Z, par les formules

$$X=c\text{Cos.}\lambda\text{Cos.}\mu\ ,$$

$$Y=c\text{Cos.}\lambda\text{Sin.}\mu\ ,$$

$$Z=c\text{Sin.}\lambda\ .$$

8. On passera de là aux coordonnées x, y, z, au moyen des formules

$$x=+X\text{Cos.}\alpha+Y\text{Cos.}\varepsilon\text{Sin.}\alpha+Z\text{Sin.}\varepsilon\text{Sin.}\alpha\ ;$$

$$y=-X\text{Sin.}\alpha+Y\text{Cos.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha+Z\text{Sin.}\varepsilon\text{Cos.}\alpha\ ;$$

$$z=\qquad -Y\text{Sin.}\varepsilon\qquad +Z\text{Cos.}\varepsilon\ .$$

9. Enfin, en négligeant, comme on peut bien le faire, les dimensions du globe terrestre, vis-à-vis de la distance de la terre au soleil, on conclura de là les coordonnées q, r du lieu apparent du centre de la lune sur le disque solaire, au moyen des équations

$$(B-x)q=Bq'-ky\ ,$$

$$(B-x)r=Br'-kz\ ;$$

la distance apparente entre les centres des deux astres sera donc $\sqrt{q^2+r^2}$; et la grandeur de la partie éclipsée sera égale à la somme de leurs demi-diamètres, moins la distance de leurs centres; il sera donc facile, par des interpolations, de découvrir les époques du commencement et de la fin de l'éclipse, ainsi que celle de la plus grande phase. (*)

10. Dans mes deux premiers mémoires, j'ai démontré ces diverses formules, et j'en ai fait l'application à l'observateur de *Berlin*. Je me propose ici de faire un semblable calcul pour *Strasbourg* et *Nismes*. En me réservant l'observation de l'éclipse, pour la première de ces deux villes; je laisserai aux observateurs de l'autre le soin de vérifier, sur l'éclipse même, la précision de mes calculs.

§. I.

Éclipse géocentrique.

Nous avons déjà trouvé précédemment, pour le jour de l'éclipse, en prenant le rayon terrestre pour unité,

(*) C'est par erreur de copie que, dans les mémoires auxquels celui-ci fait suite, la lettre A, déjà employée pour représenter le rayon vecteur terrestre, l'a été de nouveau, pour désigner l'ascension droite du soleil; c'est également par erreur que les lettres a et n y ont reçu deux destinations différentes.

$$A=23615\;;\quad B=57{,}0765\;:$$

De plus, en prenant l'intervalle de quatre heures pour l'unité du temps t, compté depuis huit heures du matin, temps vrai de Paris ; nous avons trouvé, par une interpolation convenable,

$$\alpha=180^\circ+56^\circ.54'.35''+607''t\;;$$

$$M=-5207'',\quad m=+8210'',$$

$$N=+3562'',\quad n=-\;804''\;;$$

ce qui fait aisément trouver, pour tout instant donné, les coordonnées géocentriques q', r', du centre de la lune, à l'aide des formules

$$q'=-5207''+8210''t,$$

$$r'=+3562''-\;804''t\;;$$

l'angle horaire μ sera d'ailleurs

$$\mu=174^\circ.36'.36''+216626''t+D\;;$$

D étant la longitude de l'observateur, comptée du méridien de Paris; *positive*, si elle est *orientale*, et *négative*, au contraire, si elle est *occidentale*.

On pourra, d'après cela, former le tableau suivant :

$t=8^h$,	$q'=-5207''$,	$r'=+3567''$,	$\alpha=180^\circ+56^\circ.54'.35''$,	$\mu=D+174^\circ.36'.36''$,
9,	-3154,	$+3361$,	$56.57.\;7$,	$189.39.12$,
10,	-1102,	$+3160$,	$56.59.39$,	$204.41.49$,
11,	$+\;950$,	$+2959$,	$57.\;2.11$,	$219.44.25$,
12,	$+3003$,	$+2758$,	$57.\;4.43$,	$234.47.\;2$;

Ce calcul préliminaire sera commun à toutes les éclipses locales qu'on aura dessein de calculer.

§. II.

Calcul pour Strasbourg.

On a, pour *Strasbourg*,

$\lambda = 48^\circ.34'.56''$;

$D = 5^\circ.24'.36''$, en degrés;

$= 0^h.21'.58''$, en temps.

On aura conséquemment

$t = 8^h$,	$\mu = 180^\circ + 0^\circ.\ 1'.12''$,
9,	15. 3.48,
10,	30. 6.25;
11,	45. 9. 1;
12,	60.11.38;

La table suivante nous fera ensuite connaître les logarithmes des coordonnées désignées par X, Y, Z. Il faut remarquer que les deux premières sont constamment négatives, et que la troisième seule est positive.

t	Log. X	Log. Y	Log. Z
8,	9.8205590,	9.3634664,	9.8750068,
9,	9.8053738,	9.2353429,	9.8750068;
10,	9.7576222,	9.5209263,	9.8750068,
11,	9.6689040,	9.6711780,	9.8750068,
12;	9.5169808,	9.7589324,	9.8750068.

A l'aide de ces logarithmes et de l'obliquité ϵ de l'écliptique, égale à 23°.27'.52'', on trouvera les valeurs des coordonnées x, y, z, ainsi qu'il suit:

$t=8^h$,	$x=+0{,}1111860$,	$y=-0{,}7171560$,	$z=+0{,}6879860$;
9,	$+0{,}2302776$,	$-0{,}6122939$,	$+0{,}7563520$,
10,	$+0{,}3166065$,	$-0{,}4767797$,	$+0{,}8200254$;
11,	$+0{,}3642915$,	$-0{,}3198304$,	$+0{,}8746428$,
12,	$+0{,}3700738$,	$-0{,}1512366$,	$+0{,}9164600$;

Voici enfin la table des coordonnées q et r, qui fixent, pour chaque instant, le lieu apparent du centre de la lune, sur le disque du soleil, par rapport à l'observateur de *Strasbourg*, de même que la distance des centres, égale à $\sqrt{q^2+r^2}$

$t=8^h$,	$q=-2627''$,	$r=+1084''$,	$\sqrt{q^2+r^2}=2838''$,
9,	-950,	$+637$,	1143,
10,	$+622$,	$+205$,	655,
11,	$+2116$,	-195,	2125,
12,	$+3575$,	-549,	3617.

En prenant l'intervalle d'une heure pour unité de temps, et en désignant par t le temps compté depuis huit heures du matin, on aura, moyennant la formule d'interpolation du n.° 50 de mon premier mémoire (Tom. VI, pag. 153), les deux formules qui suivent :

$$6q=-15762+10407t-352t^2+3t^3+4t^4;$$

$$24r=+26016-10754t-57t^2+86t^3-3t^4.$$

A l'aide de ces deux formules générales, j'ai construit, par de simples additions consécutives, la table suivante, qui fait connaître

les coordonnées q, r, de même que la distance des centres, de quart d'heure en quart d'heure.

$t = 8^h.\ 0'$, $q = -2637''$, $r = +1084''$, $\sqrt{q^2+r^2} = 2842''$

15,	−2197,	+ 972,	2402
30,	−1774,	+ 860,	1972
45,	−1359,	+ 748,	1551
9. 0,	− 950,	+ 637,	1144
15,	− 548,	+ 527,	760
30,	− 152,	+ 418,	445
45,	+ 238,	+ 311,	392
10. 0,	+ 622,	+ 295,	655
15,	+1001,	+ 101,	1006
30,	+1376,	± 0,	1376
45,	+1748,	− 99,	1751
11. 0,	+2116,	− 195,	2125
15,	+2482,	− 288,	2498
30,	+2844,	− 378,	2872
45,	+3210,	− 466,	3244
12. 0,	+3575,	− 549,	3617

L'observateur de *Strasbourg* verra donc le centre de la lune dans l'écliptique même, à $10^h 30'$, temps de Paris, puisque sa latitude sera nulle alors; on trouve ensuite facilement, par des interpolations locales, que la conjonction apparente aura lieu à $9^h.35'.51''$; que le commencement et la fin de l'éclipse, qui doivent arriver lorsque la distance des centres sera égale à la somme des rayons, c'est-à-dire, à $1960''$, auront lieu, savoir; le commencement à $8^h.30'.26''$, et la fin à $10^h.53'.23''$; le temps se rapportant toujours au méridien de Paris.

Pour déterminer, avec précision, l'époque et l'étendue de la plus grande phase, extrayons du précédent tableau les résultats que voici :

$t=9^h.15'$,	dist. des centres $=760''$,	 0,
9.30;	445	, ... 1;
9.45,	392	, ... 2,
10.0;	655	, ... 3.

En représentant donc par t le temps compté par quarts d'heures, depuis $9^h.15'$, temps vrai de Paris, et par y la distance apparente des centres, notre formule d'interpolation déjà citée nous donnera

$$y=760-428t+104t^2+9t^3\ ;$$

on aura donc, pour l'époque de la plus courte distance des centres; la racine positive de l'équation

$$0=-428+208t+27t^2\ ;$$

donc, pour cette circonstance,

$$t=1,6878=25'.19'', \quad \text{d'où} \quad y=377''\ ;$$

ce

ce qui rend la grandeur de la partie éclipsée égale à 1583″, c'est-à-dire, 9 doigts 46′; ou encore, 39′ de plus que pour l'observateur de Paris; ce qui fait environ un dix-huitième du diamètre apparent du soleil.

En résumant et réduisant les temps au méridien de Strasbourg, on aura donc les circonstances de l'éclipse ainsi qu'il suit :

Commencement à . . . . 8h.52′. 4″ du mat.

Conjonction apparente à . . . . 9 .57 .29

Plus grande phase, de 9 doigts 46′, à 10. 1 .57

Milieu à . . . . 10. 3 .32

Passage de la lune à l'écliptique à . . . 10 .52 .38

Fin à . . . . 11 .15. 1

Durée . . . . 2 .22 .57

§. III.

Calcul pour Nismes.

On a, pour *Nismes*,

$\lambda = 43°.50'.8''$;

$D = 2°, 1'.0''$ en degrés;

$= 0^h.\ 8'.6''$ en temps;

ce qui donne

$$\mu=176°.37'.36''+216626t\ ;$$

D'après ces données, et en opérant comme ci-dessus, on formera la première table

$t=8^h$, $\mu=$ 176°.37'.36'',
9, 180°+ 11.40.12,
10, 180 + 26.42.48,
11, 180 + 41.45.24;
12, 180 + 56.48. 0 ;

On passera de là aux logarithmes des coordonnées X, Y, Z, lesquelles, à l'exception des valeurs de Z et de la première de Y, sont toutes négatives.

$t=8^h$,	Log.X=9.8573815,	Log.Y=8.6278202,	Log.Z=9.8404769;
9,	9.8490631,	9.1640758,	9.8404769,
10,	9.8091162,	9.5108901,	9.8404769;
11,	9.7308616,	9.6815881,	9.8404769,
12,	9.5965688,	9.7807377,	9,8404769.

On en conclura les valeurs de x, y, z, ainsi qu'il suit :

$t=8^h$,	$x=+0.1294979$,	$y=-0{,}7751049$,	$z=+0{,}6184193$;
9,	+0.2662798,	−0,6695269;	+0,6934135;

10,	+0.3691674,	−0,5285466;	+0,7644261,
11,	+0.4311348,	−0,3617502,	+0,8265895,
12,	+0.4479444,	−0,1805091,	+0,8756432:

On aura enfin pour les coordonnées q et r du lieu apparent du centre de la lune sur le disque solaire, et pour la distance apparente entre les centres des deux astres, relativement à l'observateur de Nismes,

$t=8^h$,	$q=-2413''$,	$r=+1335''$,	$\sqrt{q^2+r^2}=2738''$,
9,	-744,	$+865$,	1141,
10,	$+809$,	$+407$;	905,
11,	$+2272$;	-21;	2272,
12;	$+3683$,	-402,	3705.

En prenant l'intervalle d'une heure pour unité de temps, et en désignant par t le temps compté depuis huit heures du matin, on conclura de ce dernier tableau, au moyen de notre formule d'interpolation,

$$6q=-14478+10396t-393t^2+8t^3+3t^4,$$

$$24r=+32040-11214t-83t^2+18t^3-t^4.$$

Au moyen de ces formules générales rien ne sera plus facile que de former, par des additions successives, le tableau suivant, qui donne, de quart d'heure en quart d'heure, les circonstances de l'éclipse.

t	q	r	$\sqrt{q^2+r^2}$
$t = 8^h\ 0'$,	$q = -2413''$,	$r = +1335''$,	$\sqrt{q^2+r^2} = 2738''$;
15;	−1984;	+1217;	2328;
30,	−1563;	+1100,	1911;
45,	−1150;	+ 917,	1471,
9. 0,	− 744;	+ 865;	1141,
15,	− 346,	+ 749;	825;
30;	+ 46;	+ 633,	635;
45,	+ 430,	+ 519;	674;
10. 0;	+ 809;	+ 407;	905;
15;	+1182;	+ 297;	1218;
30;	+1550;	+ 188;	1561;
45,	+1913;	+ 82,	1915,
11. 0,	+2272;	− 21;	2272;
15,	+2628;	− 121;	2631;
30;	+2981;	− 218,	2989;
45;	+3333,	− 312;	3348;
12. 0;	+3683;	− 402,	3705;

Alors, par des interpolations locales, on trouvera, pour l'époque de la conjonction apparente, $9^h.28'.14''$; pour celle du passage

apparent du centre de la lune par l'écliptique $10^h.56'.56''$; pour celle du commencement de l'éclipse $8^h.28'.14''$; et pour celle de sa fin $10^h.46'.54''$; le temps étant compté du méridien de Paris.

Il restera à fixer l'époque et l'étendue de la plus grande phase; pour avoir l'une et l'autre, avec précision, nous extrayerons de notre tableau les résultats que voici :

$t = 9^h.15'$, dist. des centres $= 825''$, ... 0,
9.30, 635, ... 1,
9.45, 674, ... 2,
10.0, 905, ... 3,

Désignant alors par t le temps, compté de quart d'heure en quart d'heure depuis $9^h.15'$ du matin, et représentant par y la distance des centres, notre formule d'interpolation nous donnera

$$6y = 4950 - 1901t + 798t^2 - 37t^3 ;$$

d'où nous conclurons, pour l'époque de la plus grande phase,

$$0 = -1901 + 1596t - 111t^2 ;$$

ce qui donne

$$t = 1,252 = 18'.37'', \quad \text{d'où} \quad y = 625'' ;$$

ce qui rend la grandeur de la partie éclipsée égale à $1335''$ ou 8 doigts $14''$. Ayant donc égard à la différence des méridiens on aura les circonstances de l'éclipse pour Nismes ainsi qu'il suit :

Commencement à	$8^h.36'.20''$.
Conjonction apparente à	9.36.20.
Plus grande phase, de 8 doigts 14', à	9.41.43.
Milieu à	9.45.40.
Fin à	10.55.9.
Passage de la lune à l'écliptique à . . .	11.5.2.
Durée.	2.18.49.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Formules nouvelles pour la transformation des coordonnées rectangulaires dans l'espace;

Par M. GERGONNE.



LA transformation des coordonnées le plus fréquemment employée, dans la géométrie à trois dimensions, est celle qui consiste à passer d'un système rectangulaire à un autre système, aussi rectangulaire, ayant la même origine que le premier. On sait qu'alors les coordonnées primitives sont des fonctions du premier degré de celles qu'on leur substitue (*), ne renfermant point de terme constant; et l'on obtient facilement, entre les *neuf* coefficiens que ces fonctions comportent, *six* relations distinctes, lesquelles en renferment implicitement un grand nombre d'autres, non moins symétriques que celles-là. On sait d'ailleurs que ces neuf coefficiens ne sont autre chose que les cosinus tabulaires des angles que forment chacun des axes transformés avec les trois axes primitifs.

(*) Pour prouver cette proposition, plusieurs géomètres se bornent à observer qu'à un point quelconque, rapporté au système primitif, il ne doit répondre qu'un point unique, dans le système transformé. Mais, si ce raisonnement était concluant, il devrait être également applicable au cas où l'on prend pour nouvelles coordonnées les distances du point variable à trois points fixes. Or, on sait qu'alors les formules nécessaires pour passer des unes aux autres, loin d'être du premier degré, ne sont pas même rationnelles.

Les relations élégantes qui se trouvent exister entre les neuf arbitraires introduites par la transformation, lorsqu'elles sont bien connues et employées avec adresse, permettent souvent d'heureuses simplifications dans les calculs ; mais elles deviennent aussi quelquefois une source d'embarras. A la vérité, on pourrait en faire usage pour substituer à six des neuf arbitraires des fonctions équivalentes des trois autres, qui alors entreraient seules dans les formules ; mais, en faisant même de celles-ci le choix le plus avantageux ; c'est-à-dire, en prenant, avec M. Monge, les cosinus des angles que forment respectivement les nouveaux axes avec ceux que l'on suppose leur correspondre dans le système primitif, on ne parvient qu'à des formules radicales, dont la symétrie ne saurait racheter la complication ; et qui sont conséquemment plus curieuses qu'utiles.

Guidé par cette considération, que tout changement de situation d'un angle trièdre dans l'espace autour de son sommet peut toujours être effectué au moyen de trois rotations exécutées successivement autour de ses arêtes, Euler a donné un autre procédé de transformation, adopté depuis par Lagrange et Laplace. La méthode d'Euler a l'avantage de n'exiger qu'une application trois fois réitérée des formules très-simples à l'aide desquelles on passe, dans la géométrie plane, d'un système rectangulaire à un autre système rectangulaire de même origine que celui-là ; cette méthode a encore l'avantage de ne mettre en évidence que trois arbitraires absolument indépendantes, comme la nature du problème l'exige ; mais malheureusement les formules auxquelles elle conduit, assez compliquées d'ailleurs, manquent totalement de cette élégante symétrie si justement recherchée aujourd'hui dans l'analise algébrique ; et la valeur de chacune des coordonnées primitives, en fonction de celles qu'on leur substituent, se trouve être plus ou moins simple, suivant l'ordre observé dans les trois rotations successives. Nous devons remarquer, au surplus, que les trois arbitraires introduites, lesquelles sont ici les angles qui mesurent les trois rotations, entrant à la fois dans les formules par leur sinus et par leur cosinus ; il s'ensuit que,

si l'on veut conserver à ces formules la forme rationnelle, il faudra absolument les considérer comme introduisant *six* arbitraires, liées deux à deux par *trois* équations de condition. La méthode d'Euler mériterait donc incontestablement la préférence sur l'autre, si elle conduisait à des résultats plus symétriques (*).

Il est connu depuis long-temps que tout changement de situation d'un angle trièdre dans l'espace, autour de son sommet, peut être censé résulter, non seulement de trois rotations successives autour de ses trois arêtes, mais encore d'une rotation unique autour d'un axe fixe, passant par ce même sommet. On a donc lieu d'être surpris, d'après cela, qu'on n'ait point encore songé jusqu'ici à fonder sur cette remarque un mode de transformation de coordonnées. Cependant, dans cette manière d'envisager la chose, les trois axes des coordonnées étant absolument traités de la même manière, on pouvait se promettre à l'avance de la symétrie dans les formules. On pouvait penser d'ailleurs que l'application de ce mode de transformation pourrait être très-convenable, soit dans la recherche des surfaces de révolution, soit dans les problèmes de mécanique relatifs à la rotation des corps.

Cherchons donc les formules qui peuvent résulter de cette manière de considérer la transformation des coordonnées. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires primitives; soient t, u, v les coordonnées rectangulaires de même origine que l'on se propose de leur substituer: soit r l'axe fixe passant par l'origine autour duquel on suppose qu'il faut faire tourner le système primitif pour que les axes des x, des y et des z viennent respectivement coïncider avec ceux des t, des u et des v; supposons en outre que la rotation s'exécute des x vers les y, des y vers les z et des z vers les x

(*) On peut consulter, sur tout ce qui précède le I.er volume du *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix. On trouvera aussi à la page 241 du VI.e volume de ce recueil, une démonstration très-élémentaire du principe qui sert de fondement à la méthode d'Euler.

et désignons par θ l'angle qui en mesure la quantité. Si nous désignons par (r, x) et (r, t) les angles que forme l'axe fixe avec ceux des x et des t, nous aurons évidemment

$$\text{Ang.}(r, t)=\text{Ang.}(r, x) . \qquad (1)$$

Si de plus nous désignons par (rx, rt) l'angle que comprennent entre eux les deux plans conduits par r et par x et t, on devra avoir aussi

$$\text{Ang.}(rx, rt)=\theta . \qquad (2)$$

Cela posé, soient faits

$$\text{Cos.}(r, x)=a , \quad \text{Cos.}(r, y)=b , \quad \text{Cos.}(r, z)=c ;$$

$$\text{Cos.}(t, x)=\alpha ; \quad \text{Cos.}(t, y)=\beta , \quad \text{Cos.}(t, z)=\gamma ;$$

$$\text{Cos.}\theta=m , \quad \text{Sin.}\theta=n ;$$

nous aurons

$$a^2+b^2+c^2=1 , \qquad (3)$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 , \qquad (4)$$

$$m^2+n^2=1 ; \qquad (5)$$

Les équations de r et de l'axe des t seront

$$\text{Pour } r\left\{\begin{array}{l} cx=az , \\ cy=bz , \end{array}\right. \quad \text{Pour l'axe des } t\left\{\begin{array}{l} \gamma x=\alpha z , \\ \gamma y=\beta z ; \end{array}\right.$$

En conséquence, on aura

$$\text{Cos.}(r, t)=a\alpha+b\beta+c\gamma ;$$

mais on a d'ailleurs

$$\text{Cos.}(r,x)=a\ ;$$

on aura donc (1)

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=a\ . \qquad (6)$$

Le plan qui contient r et x a pour équation

$$cy-bz=0\ ,$$

et celui qui contient r et t a pour équation

$$(b\gamma-c\beta)x+(c\alpha-a\gamma)y+(a\beta-b\alpha)z=0\ ;$$

d'après quoi l'on doit avoir (2)

$$m=\text{Cos.}\theta=\text{Cos.}(rt,rx)=\frac{c(c\alpha-a\gamma)-b(a\beta-b\alpha)}{\sqrt{(b^2+c^2)\{(b\gamma-c\beta)^2+(c\alpha-a\gamma)^2+(a\beta-b\alpha)^2\}}}\ .$$

Le numérateur de cette expression, qui revient à

$$(b^2+c^2)\alpha-a(b\beta+c\gamma)\ ,$$

se réduit, en vertu des relations (3 et 6), à

$$\alpha-a^2\ .$$

Le second facteur sous le radical du dénominateur devient, en développant

$$(b^2+c^2)\alpha^2-2bc\beta\gamma$$

$$+(c^2+a^2)\beta^2-2ca\gamma\alpha$$

$$+(a^2+b^2)\gamma^2-2ab\alpha\beta\ ;$$

ou, par la relation (3),

$$(1-a^2)\alpha^2-2bc\beta\gamma$$
$$+(1-b^2)\beta^2-2ca\gamma\alpha$$
$$+(1-c^2)\gamma^2-2ab\alpha\beta\,;$$

ou, par la relation (4),

$$1-(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2\,;$$

ou enfin, par la relation (6),

$$1-a^2\,,\quad \text{ou}\quad b^2+c^2\,.$$

Il viendra conséquemment

$$m=\frac{\alpha-a^2}{b^2+c^2}=\frac{\alpha-a^2}{1-a^2}\,. \qquad (7)$$

A cause du radical de la valeur primitive de m, on pourrait concevoir du doute sur le signe du second membre de cette dernière équation ; mais en remarquant que, par la nature du problème, on doit avoir en même temps $\alpha=1$ et $m=1$, on se convaincra que ce signe doit être positif.

Présentement, on tirera des équations (4, 6, 7), en ayant égard aux relations (3, 5)

$$\alpha=a^2(1-m)+m\,,$$
$$\beta=ab(1-m)\pm cn\,;$$
$$\gamma=ac(1-m)\mp bn\,.$$

Pour lever l'ambiguïté des signes, supposons que l'axe fixe r soit symétriquement situé par rapport aux axes des coordonnées primitives, et que l'on fasse faire au système un tiers de révolution entière autour de cet axe ; il est clair qu'alors l'axe des t devra coïncider

avec l'axe des y, on aura donc $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=0$; mais, dans la même hypothèse l'équation (3) donne $a=b=c=\frac{1}{3}\sqrt{3}$; et l'on a de plus $m=-\frac{1}{2}$, $1-m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $ab=ac=\frac{1}{3}$, $cn=bn=\frac{1}{2}$; $ab(1-m)=ac(1-m)=\frac{1}{2}$; ce qui donne $\beta=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}$, et prouve ainsi que ce sont les signes supérieurs qu'il faut prendre.

On a donc ainsi

$$\text{Cos.}(t,x)=a^2(1-m)+m\,,$$

$$\text{Cos.}(t,y)=ab(1-m)+cn\,,$$

$$\text{Cos.}(t,z)=ac(1-m)-bn\,;$$

et l'on aura semblablement

$$\text{Cos.}(u,y)=b^2(1-m)+m\,,\quad \text{Cos.}(v,z)=c^2(1-m)+m\,;$$

$$\text{Cos.}(u,z)=bc(1-m)+an\,,\quad \text{Cos.}(v,x)=ca(1-m)+bn\,,$$

$$\text{Cos.}(u,x)=ab(1-m)-cn\,;\quad \text{Cos.}(v,y)=bc(1-m)-an\,;$$

d'où on conclura, par les formules connues,

$$x=\{a^2(1-m)+m\}t+\{ab(1-m)-cn\}u+\{ca(1-m)+bn\}v\,;$$

$$y=\{b^2(1-m)+m\}u+\{bc(1-m)-an\}v+\{ab(1-m)+cn\}t\,;$$

$$z=\{c^2(1-m)+m\}v+\{ca(1-m)-bn\}t+\{bc(1-m)+an\}u\,.$$

Ce sont là les formules demandées, dans lesquelles les cinq constantes a, b, c, m, n, sont liées entre elles par les deux relations

$$a^2+b^2+c^2=1\,,\quad m^2+n^2=1\,.$$

Les trois premières fixent la situation de l'axe de rotation ; les deux autres déterminent la quantité de cette rotation.

Si l'on veut repasser du système transformé au système primitif, il faudra faire

$$t=\{a^2(1-m)+m\}x+\{ab(1-m)+cn\}y+\{ca(1-m)-bn\}z\ ,$$

$$u=\{b^2(1-m)+m\}y+\{bc(1-m)+an\}z+\{ab(1-m)-cn\}x\ ,$$

$$v=\{c^2(1-m)+m\}z+\{ca(1-m)+bn\}x+\{bc(1-m)-an\}y\ ;$$

formules qui ne diffèrent des précédentes qu'en ce que x, y, z, y ont pris respectivement la place de t, u, v, et réciproquement, et que n y a changé de signe. Il est très-aisé de se rendre raison de cette dernière circonstance.

POLYGONOMÉTRIE.

Recherches sur les polygones, contenant la solution du problème proposé à la page 256 du VI.e volume de ce recueil,

Par M. Bérard, principal et professeur de mathématiques du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

PROBLÈME I. *Construire un quadrilatère dont les quatre côtés soient donnés, tant de grandeur que de disposition consécutive; et qui soit équivalent au quarré construit sur une droite donnée?*

Solution. Soit ABCD le quadrilatère demandé; soient faits AB$=a$;

$BC=b$; $CD=c$, $DA=d$; et soit k^2 le quarré donné. Tout se réduit évidemment à trouver l'une des deux diagonales, AC par exemple. Nommons x cette diagonale ; nous aurons

$$Aire\ ABC=\tfrac{1}{4}\sqrt{2a^2x^2+2b^2x^2+2a^2b^2-x^4-a^4-b^4},$$

$$Aire\ ADC=\tfrac{1}{4}\sqrt{2c^2x^2+2d^2x^2+2c^2d^2-x^4-c^4-d^4};$$

ajoutant donc ces deux équations, multipliant par 4 et ayant égard à la condition du problème, il viendra

$$\sqrt{2(a^2+b^2)x^2-(a^2-b^2)^2-x^4}+\sqrt{2(c^2+d^2)x^2-(c^2-d^2)^2-x^4}=4k^2;$$

équation qui doit donner x.

En chassant les radicaux, et faisant, pour abréger,

$$a^2+b^2+c^2+d^2=a'^2,$$

$$a^2+b^2-c^2-d^2=b'^2,$$

$$a^2+c^2-b^2-d^2=c'^2,$$

$$a^2+d^2-b^2-c^2=d'^2;$$

il viendra

$$4(16k^4+b'^4)x^4-4(16a'^2k^4-b'^2c'^2d'^2)x^2+(16k^4+c'^4)(16k^4+d'^4)=0;$$

équation du quatrième degré qui se résout à la manière du second (*).

Ce problème conduit naturellement au suivant :

(*) On peut obtenir bien simplement l'angle des deux diagonales du quadrilatère. Soit O leur intersection. Faisons

$$OA=\alpha,\ OB=\beta,\ OC=\gamma,\ OD=\delta$$

$$Ang.AOB=Ang.COD=\varepsilon,\ \text{d'où}\ Ang.BOC=Ang.DOA=\pi-\varepsilon;$$

nous aurons

PROBLÈME II. Entre tous les quadrilatères qui ont les mêmes côtés, se succédant dans le même ordre, quel est celui qui a la plus grande ou la moindre surface?

Solution. Tout se réduit évidemment à trouver la valeur de x, qui rend *maximum* ou *minimum* la quantité

$$\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-x^2)^2}+\sqrt{4c^2d^2-(c^2+d^2-x^2)^2}\ ;$$

égalant donc sa différentielle à zéro, il viendra

$$Cos.\mathrm{AOB}=Cos.\mathrm{COD}=-Cos.\mathrm{BOC}=-Cos.\mathrm{DOA}=\mathrm{Cos}.\theta\ ;$$

et ensuite

$$4k^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha)\mathrm{Sin}.\theta\ ; \qquad (1)$$

nous auron de plus

$$2\alpha\beta\mathrm{Cos}.\theta=\alpha^2+\beta^2-a^2\ ;$$

$$2\beta\gamma\mathrm{Cos}.\theta=b^2-\beta^2-\gamma^2\ ;$$

$$2\gamma\delta\mathrm{Cos}.\theta=\gamma^2+\delta^2-c^2\ ,$$

$$2\delta\alpha\mathrm{Cos}.\theta=d^2-\delta^2-\alpha^2\ ;$$

multipliant alors la somme de ces quatre dernières équations par l'équation (1), il viendra, toutes réductions faites,

$$\mathrm{Cot}.\theta=\frac{b^2+d^2-a^2-c^2}{4k^2}\ ;$$

J. D. G.

$$\frac{a^2+b^2-x^2}{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-x^2)^2}}+\frac{c^2+d^2-x^2}{\sqrt{4c^2d^2-(c^2+d^2-x^2)}}=0\,;$$

Transposant, quarrant et chassant les dénominateurs, on aura

$$(a^2+b^2-x^2)^2\{4c^2d^2-(c^2+d^2-x^2)^2\}=(c^2+d^2-x^2)^2\{4a^2b^2-(a^2+b^2-x^2)^2\}=0\,;$$

ou, en développant, réduisant et transposant,

$$c^2d^2(a^2+b^2-x^2)^2-a^2b^2(c^2+d^2-x^2)^2=0\,,$$

c'est-à-dire ;

$$\{cd(x^2-a^2-b^2)+ab(x^2-c^2-d^2)\}\{cd(x^2-a^2-b^2)-ab(x^2-c^2-d^2)\}=0\,,$$

ce qui donne ces deux valeurs

$$x^2=\frac{cd(a^2+b^2)\pm ab(c^2+d^2)}{ab+cd}=\frac{(ac\pm bd)(bc\pm ad)}{ab+cd}\,;$$

on trouve aisément d'ailleurs que les signes supérieurs répondent au *minimum*.

On déduit de là

$$Cos.\mathrm{ABC}=\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\,,$$

$$Cos.\mathrm{ADC}=\frac{c^2+d^2+x^2}{2cd}=\frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(ab+cd)}=-\mathrm{Cos.ABC}\,.$$

Les angles ABC, ADC sont donc supplément l'un de l'autre ; il en est donc de même des angles BAD, BCD ; le quadrilatère est donc inscriptible au cercle.

Si

Si l'on veut avoir l'expression du rayon R du cercle circonscrit ; on remarquera que ce cercle n'est autre chose que celui qui est circonscrit au triangle dont les trois côtés sont a, b, x ; or, le rayon de ce cercle est, comme l'on sait, le produit des trois côtés divisé par le quadruple de l'aire du triangle ; on aura donc

$$R^2=\frac{a^2b^2x^2}{4(a^2b^2-(a^2+b^2-x^2)^2}\;;$$

ou, en substituant,

$$R^2=\frac{(ac+bd)(bc+ad)(ab+cd)}{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}\;;$$

ou enfin, en décomposant

$$R^2=\frac{(ac+bd)(bc+ad)(ab+cd)}{(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)}\;;$$

formule commode pour le calcul par logarithmes. (Voyez la *Géométrie* de M. LEGENDRE).

PROBLÈME III. Étant donné un polygone quelconque, à angles variables, déterminer la forme qu'il doit avoir pour que sa surface soit minimum ?

Solution. Soit d'abord un pentagone ABCD, divisé en triangles par les deux diagonales AC, AD. Quel que soit le triangle AED, il faudra que le quadrilatère ABCD soit *minimum*, et conséquemment inscriptible à un cercle, lequel sera en même temps circonscrit au triangle CAD. Pareillement, quel que soit le triangle ABC, le quadrilatère ACDE devra être *minimum*, et conséquemment inscriptible à un cercle, lequel sera en même temps circonscrit au triangle CAD. Puis donc qu'on ne peut circonscrire qu'un cercle unique à ce triangle, il en faut conclure que les deux cercles auxquels doivent être inscrits les quadrilatères ABCD et AEDC ne sont qu'un

seul et même cercle ; et que conséquemment le pentagone *minimum* doit être inscriptibte au cercle.

En passant du pentagone à l'hexagone, de l'hexagone à l'eptagone, et ainsi de suite, comme nous venons de passer du quadrilatère au pentagone ; on verra clairement que de tous les polygones formés par les mêmes côtés se succèdant consécutivement, dans un ordre déterminé, le plus petit est celui auquel on peut circonscrire un cercle.

Quand à la manière de trouver soit les diagonales, soit les angles, soit le rayon du cercle circonscrit ; la difficulté croît à mesure que le nombre des côtés du polygone devient plus grand. On arrive cependant, par plusieurs moyens, à une équation finale, dont il ne reste plus qu'à déterminer la racine.

Soit, par exemple, le pentagone ABCDE, dans lequel nous supposerons AB$=a$, BC$=b$, CD$=c$, DE$=d$, EA$=e$; en le décomposant, par une diagonale AD$=x$, en un quadrilatère ABCD ; dont les côtés sont a, b, c, x, et en un triangle dont les côtés sont x, d, e, et en désignant par R le rayon du cercle circonscrit au pentagone, lequel doit être en même temps circonscrit au quadrilatère et au triangle ; on aura, d'après les résultats trouvés ci-dessus.

$$R^2=-\frac{(ax+bc)(bx+ca)(cx+ab)}{(x-a-b-c)(x+b+c-a)(x+c+a-b)(x+a+b-c)},$$

$$R^2=-\frac{d^2e^2x^2}{(x+d+e)(x-d-e)(x+d-e)(x-d+e)};$$

équations qui serviront à déterminer R et x. L'élimination de R entre elles conduira, pour x, à une équation du 7.me degré, qui au surplus sera peut-être susceptible d'abaissement.

On peut aussi, pour chaque polygone, parvenir directement à une équation en R. Supposons, par exemple, qu'il soit toujours

question du pentagone ; soient A, B, C, D, E les angles au centre, respectivement opposés aux côtés a, b, c, d, e ; on aura

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A=\frac{a}{2R},\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}B=\frac{b}{2R},\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}C=\frac{c}{2R},\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}D=\frac{d}{2R},\ \text{Sin.}\tfrac{1}{2}E=\frac{e}{2R}\ ;$$

de là on conclura les cosinus des mêmes angles. On aura ensuite

$$\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{2}E=\pi\ ,$$

d'où

$$\text{Sin.}(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{2}E)=0\ ;$$

développant donc cette dernière équation, et faisant, après le développement, la substitution des valeurs des sinus et des cosinus, on parviendra à une équation finale qui ne contiendra plus que la seule inconnue R, combinée avec les côtés a, b, c, d, e, du polygone proposé.

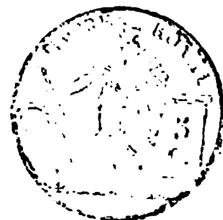
QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. CONSTRUIRE un *quadrilatère complet*, dans lequel on connaît les trois diagonales, et les angles qu'elles forment deux à deux ?

II. On propose de déterminer l'équation de la surface de moindre étendue entre toutes celles qui se terminent à la commune section de deux cylindres droits de même rayon, qui se pénètrent de manière que leurs axes sont perpendiculaires l'un à l'autre, et que l'axe de chaque cylindre est tangent à la surface de l'autre ?





MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Mémoire descriptif de plusieurs machines, à l'usage de la marine, construites à Rochefort, d'après les projets de M. Hubert, officier du génie maritime;

Par M. Ch. Dupin, correspondant de l'institut, capitaine du génie maritime, etc.

Rapport sur ce mémoire, fait à la classe des sciences physiques et mathématiques de l'institut;

Par M. de Prony.

La classe a chargé M. Sané, M. Molard et moi, de l'examen d'un mémoire de M. Dupin, son correspondant, contenant la description de plusieurs machines exécutées à Rochefort, d'après les projets de M. Hubert, officier du génie maritime. Celles de ces machines sur lesquelles l'auteur du mémoire désire principalement fixer l'attention de la classe sont au nombre de sept, dont nous allons donner les descriptions sommaires.

§. I.

Dynamomètre pour éprouver la force des cordages et des toiles à voiles.

Les cordages et les toiles employés dans le gréement et la voilure des vaisseaux, doivent avoir une force considérable, pour résister aux actions combinées de la mer et des vents; et cependant il est important de mettre dans leur construction toute l'économie qui peut être compatible avec la solidité, et par conséquent de connaître les efforts que les différentes matières dont ils sont formés et leurs différens modes de construction les rendent capables de supporter. C'est dans cette vue que le Ministre de la marine, après l'examen des différens dynamomètres employés dans les arsenaux, et sur le rapport de notre confrère M. Sané, inspecteur-général de la marine, a adopté, de préférence à tous autres, le mécanisme présenté par M. Hubert.

Le cordage en expérience, mis dans une position verticale, est accroché par son point supérieur à la petite branche d'une romaine horizontale. A mesure que ce cordage est tendu, par les moyens dont nous allons parler, le poids curseur de la romaine est éloigné du point de suspension par un mouvement de va et vient, fort simple, qu'un homme met en jeu en tournant l'arbre d'un petit treuil, de manière que la grande branche de la romaine demeure toujours horizontale. On a ainsi les efforts supportés par le cordage en expérience, non seulement lorsqu'il se casse, mais dans tous les instans qui précèdent celui de la rupture.

Ce cordage est attaché, à son extrémité inférieure, à un autre cordage d'une plus grande force que la sienne, lequel, après avoir passé sur une poulie fixe, va s'enrouler sur une hélice conique dont l'axe est horizontal, et dont la base est dentée sur toute sa circonférence. Cette denture est menée par une vis sans fin, placée à l'extrémité d'un axe horizontal dont l'autre extrémité porte une

roue verticale ayant sa circonférence garnie de barres perpendiculaires à son plan, et auxquelles s'adaptent les mains des hommes employés à éprouver le cordage.

Les principaux motifs qui ont déterminé le Ministre à adopter cette machine, de préférence à celle qu'on employait anciennement, sont sa précision, sa simplicité, et le peu d'effort qu'elle exige sur les barres de la manivelle, relativement au degré de tension du cordage en expérience.

§. II.

Machines pour compter le nombre de tours que fait un axe se mouvant dans des colliers fixes.

Les produits des machines hydrauliques mises en mouvement par des axes tournans sont, en général, proportionnels au nombre de tours de ces axes, nombre qu'il est par conséquent essentiel de connaître, pour évaluer tant les effets des machines que les salaires des travailleurs employés à les faire mouvoir. On a depuis long-temps imaginé, pour remplir ces conditions, des systèmes de roues dentées et de pignons portant des aiguilles qui indiquent les unités, dizaines, centaines, etc. L'un de nous a employé cette espèce de système, dans les travaux de fondation du pont Louis XVI.

M. Hubert a simplifié fort heureusement l'ancien mécanisme. Deux roues minces de même diamètre et juxta-posées portent l'une 100 et l'autre 99 dents. La roue de 99 tourne sur un axe fixe, par le moyen d'un canon qui, traversant la roue de 100, la dépasse suffisamment pour porter une aiguille destinée à parcourir les divisions marquées sur la place apparente de cette roue de 100, derrière laquelle est couchée celle de 99. La roue de 100 porte un index, qui court sur les graduations d'un limbe fixe, divisé en 10 parties seulement; la denture suppléant aux divisions de 100mes; et une vis de l'axe vertical de la machine en expérience, engraine à la fois les deux dentures. Au moyen de ces dispositions, lorsque

la roue de 100 a fait un tour entier, qui correspond à 100 tours de la machine, la roue de 99 a fait un tour, plus $\frac{1}{99}$ de tour. L'aiguille qu'elle porte a donc marché de $\frac{1}{99}$ de circonference sur la face antérieure de la roue de 100, et chaque marche pareille est le résultat de 100 tours de la machine; ainsi lorsque, par les mouvemens relatifs des deux roues, celle de 99, qui indique les centaines, aura fait une révolution entière sur celle de 100, cette dernière, qui en indique les dizaines et les unités, aura fait 99 tours, correspondant à 9900 tours de la machine. Cette machine étant supposée à manège, et les chevaux parcourant environ 24 mètres par tour, les 9900 tours donnent un espace parcouru total de 237600 mètres.

§. III

Machine pour forer les parcs à boulets.

On appelle *parcs à boulets* des madriers en bois, fixés sur le pont ou contre la muraille d'un vaisseau, dans chacun desquels est pratiquée une file de trous hémisphériques, destinés à contenir les boulets, qui doivent s'emboiter très-exactement dans ces trous, de manière à ne prendre aucun mouvement, dans les plus violentes oscillations du vaisseau.

La principale particularité de la machine construite par M. Hubert, pour creuser ces trous hémisphériques, consiste dans la forme de la tarrière. Il avait d'abord donné à cet outil la forme d'un demi-grand cercle de la demi-sphère, dont les moitiés, formant le quart du cercle total, étaient aiguisées en sens contraires, de manière à tailler en même temps, lorsqu'on tournait la tarrière dans le sens convenable; mais, pour diminuer considérablement le travail du creusement, il a construit une tarrière ayant la forme d'un demi-cylindre, dont le diamètre est égal au rayon de l'hémisphère à creuser, et dont le tranchant est aiguisé de manière à engendrer cet hémisphère, lorsque le demi-cylindre tourne autour d'une de ses arêtes. L'avantage principal de cette dernière disposition consiste

en ce que les différentes parties de l'arête qui taille forment des angles différens avec la direction du fil du bois, au lieu que, dans la première disposition, les directions des mouvemens de tous les points de l'arête du tranchant, c'est-à-dire, les perpendiculaires au plan qui renferme cette arête, sont toujours parallèles entre elles, et font par conséquent, à un instant déterminé quelconque, les mêmes angles avec le fil du bois.

M. Dupin assure, dans son mémoire, que la tarrière perfectionnée économise la moitié de la force motrice.

§. IV.

Machine à percer dans le bois des trous cylindriques.

Le percement des trous cylindriques qui, au premier aperçu, semble plus aisé que celui des trous hémisphériques, est cependant réellement plus difficile, ou au moins plus embarrassant. La tarrière employée pour la première espèce de trous, occupant une grande partie de l'espace dans lequel elle agit, les copeaux qu'elle forme s'accumulent dans la partie cylindrique déjà creusée, augmentent de plus en plus le frottement de l'outil et finiraient par rendre la rotation extrêmement pénible, si on ne retirait de temps en temps et cet outil et les copeaux qu'il vient d'enlever.

La machine à forer de M. Hubert a pour objet principal de faciliter cette manœuvre, sans arrêter la rotation de la machine. La tarrière est fixée à l'extrémité d'un cylindre de fer mis dans une situation horizontale, et tournant dans des colliers de cuivre. A ce cylindre est adaptée une poulie sur laquelle s'enroule une corde sans fin, au moyen de laquelle on produit le mouvement de rotation. Tout cet équipage est sur un bâtis de charpente mobile, porté par deux roulettes à axes fixes, sur lesquelles il peut se mouvoir parallèlement à l'axe de la tarrière. La pièce inférieure de ce bâtis, celle qui porte immédiatement sur les roulettes, a son point d'arrière

attaché au bas d'un aviron, ou d'une perche verticale, fixée par son point supérieur, laquelle, lorsque le système mobile qui porte la tarrière est poussé en avant, fait la fonction d'un ressort qui tend à le ramener en arrière : une corde attachée à un point fixe, près de la roulette inférieure, traverse la pièce posée sur cette roulette et qui sert de base au système mobile, vient ensuite passer sur une poulie placée vis-à-vis de son extrémité fixe, et enfin a son autre extrémité attachée à la ceinture d'un homme employé à la manœuvre de la machine. Il résulte de ces dispositions que, lorsque l'homme dont nous venons de parler se porte en arrière, il tend la corde, fait avancer l'outil sur la pièce qu'on veut percer, et fléchit la perche élastique ; et que, lorsqu'il se porte en avant, l'élasticité de la perche, dont l'effet n'est plus contrarié par la tension de la corde, fait reculer tout l'équipage qui porte la tarrière, laquelle sort de son trou, d'où tous les copeaux qui existent se trouvent expulsés.

Tous ces mouvemens sont absolument indépendans de l'agent employé à faire tourner la tarrière, dont le mouvement de rotation s'opère sans discontinuité, et toujours dans le même sens.

§. V.

Machine à creuser les trous pour incruster les dez des rouets des poulies

Les poulies s'useraient très-promptement si les essieux qui les traversent frottaient immédiatement contre le bois dont les rouets sont composés ; et, pour prévenir cet inconvénient, on est dans l'usage de garnir d'un dez métallique chaque côté de l'œil ou trou cylindrique qui traverse ces rouets.

Les dez dont nous parlons sont des plaques de cuivre, percées dans leur milieu d'un trou circulaire pour le passage de l'essieu ; mais dont le périmètre extérieur ne doit pas être un cercle con-

centrique à ce trou, afin d'éviter qu'avec l'usage le rouet ne tourne indépendamment du dez. Il faut de plus que ce dez soit encastré dans le rouet avec une telle précision qu'on n'ait jamais à craindre le moindre jeu entre l'un et l'autre.

On remplissait ordinairement ces conditions, soit en garnissant le contour extérieur du dez de tenons saillans sur son périmètre, soit en faisant ce périmètre triangulaire ou quarré, et arrondissant les angles ; mais le travail était long, et la précision du travail difficile à obtenir.

M. Hubert obtient la facilité du travail et la précision de la forme, en donnant à son dez la figure d'un grand cercle sur la circonférence duquel s'élèvent trois lunules ou portions de petits cercles, ayant leurs centres aux sommets d'un triangle équilatéral inscrit au grand cercle. Il peut ainsi employer, pour creuser les trous d'encastrement dans le rouet, la machine à forer les trous cylindriques, dont nous avons parlé à l'article précédent, en se servant de tarrières dont les mèches aient la forme convenable.

§. VI.

Machine à mortaiser les caisses des poulies.

Une des parties difficiles du travail de la fabrication d'une poulie est le creusement de la mortaise à pratiquer dans la caisse ou chappe destinée à contenir le rouet. La machine que M. Hubert a fait construire, pour exécuter ce travail, est une de celles qui, pour être bien conçues, exigent particulièrement qu'on ait les dessins ou un modèle sous les yeux. Nous dirons, en peu de mots, que les ciseaux, d'une forme particulière et nouvelle, destinés à creuser ces mortaises, sont mis dans une situation verticale, suspendus à un levier horizontal, et maintenus de manière à se mouvoir verticalement. Le point d'attache de ces ciseaux est placé entre l'axe de rotation du levier et son autre extrémité, à laquelle se trouve suspendue

une tige de fer verticale, terminée à sa partie inférieure par deux crémaillères parallèles réunies à leurs extrémités par des portions de cercles dentées; cette pièce d'engrenage est menée par un pignon fixe qui produit un mouvement vertical de va et vient. Le moyen d'assurer l'alternation et la fixité de cet engrenage nous a paru nouveau.

Le ciseau ayant ainsi un mouvement périodique de montée et de descente, il ne s'agit plus que de lui présenter les parties successives du bois qu'il doit enlever pour former la mortaise, et c'est encore le levier qui produit cet effet, par le moyen d'une tige de fer, au bas de laquelle se trouve un encliquetage à rochet qui fait tourner une vis, dont la rotation détermine le mouvement progressif d'une espèce de charriot auquel la pièce de bois à mortaiser est attachée. Ainsi, lorsque cette pièce de bois a été préalablement équarrie, percée d'un trou dont le diamètre est égal à la largeur de la mortaise et mise solidement en place sur son charriot, il ne reste, pour achever le travail, qu'à tourner la roue du va et vient.

§. VII.

Moulin à draguer.

Les eaux de la Charente tiennent continuellement dans leur cours de la vase en suspension, qui se dépose partout où la vitesse de ses eaux est ralentie. C'est le cas où se trouvent à Rochefort les avant-cales des vaisseaux, qu'on est obligé de laver chaque jour, à marée basse; et quelques canaux communiquant avec le fleuve, qui exigent des curages fréquens.

Mais l'inconvénient de l'envasement se fait sur-tout sentir à l'avant-bassin, dans lequel les cônes de construction ont leur entrée. La Charente y dépose, à chaque marée, une couche d'environ 7 millimètres d'épaisseur; et, en peu de temps, ces couches accumulées s'élèvent à une hauteur telle que les portes des formes en sont complètement





complètement obstruées. On employait autrefois des bœufs pour traîner une drague destinée au curage de ces vases, et ce travail était extrêmement long et dispendieux. M. Dupin dit que sa durée était de plusieurs mois, et évalue sa dépense de 20 à 25 mille francs. On n'ouvrait les portes que tous les trois ans, et on se privait ainsi de l'usage journalier d'un établissement très-important pour les opérations de la marine militaire.

M. Hubert a fait construire un moulin à draguer qui remédie à tous ces inconvéniens; le prix d'un seul curage, tel qu'on l'exécutait autrefois a suffi pour payer les frais de la machine; et le modique salaire de deux condamnés, chargés de la surveillance du moulin, remplace la dépense que faisaient autrefois 56 bœufs et leurs conducteurs. Voici une idée sommaire du mécanisme.

Sur un gros cylindre horizontal sont enroulés, en sens contraires, des cordages qui, par des poulies de renvoi convenablement placées, tirent la drague en deux sens directement opposés. Quand un cordage agit l'autre cède; et la drague peut ainsi traîner la vase depuis les portes du bassin jusque dans le courant du fleuve; et rétrograder pour recommencer une nouvelle course. Ce va et vient de la drague est déterminé ainsi qu'il suit : le moteur de tous le système est le vent, appliqué à un moulin semblable aux moulins hollandais, quant à sa forme et à sa manière de transmettre le mouvement de l'axe, des aîles à un arbre vertical. Le bas de cet arbre porte une lanterne, destinée à mener successivement deux roues dentées, établies autour du gros cylindre horizontal et à une distance l'une de l'autre plus grande que le diamètre de la lanterne; au moyen de quoi, lorsque cette lanterne engraine dans la roue à droite, elle ne touche pas la roue à gauche, et réciproquement; mais elle fait tourner le cylindre dans un sens ou dans le sens opposé, suivant qu'elle engraine l'une ou l'autre des deux roues dentées, et détermine par conséquent les marches contraires de la drague.

Pour opérer cette alternation d'engrainage, M. Hubert a fait

supporter l'arbre de son moulin par une traverse horizontale mobile. Un balancier, mû à main d'homme, peut agir sur cette traverse, tantôt à droite, tantôt à gauche, et fournit ainsi le moyen de changer l'engrenage à volonté.

Une circonstance heureuse facilite ce mouvement alternatif, et amortit le choc que la lenterne tend à exercer contre la roue dentée qu'elle va rencontrer. Le cordage qui tirait la drague, dans l'engrenage prêt à cesser, étant extrêmement tendu, aussitôt que la lanterne n'agit plus pour le faire tirer, se détend et donne au cylindre un mouvement rétrograde, qui est précisément celui que le changement d'engrenage doit lui communiquer; les dents de la seconde roue se trouvent donc animées du même mouvement que la lanterne, et leur emboîtage réciproque est extrêmement facilité.

Il faut voir sur les plans les moyens imaginés pour faire enrouler et dérouler uniformément les deux cordages qui déterminent le va et vient de la drague, pour faire dévier latéralement cette drague, afin qu'elle creuse successivement des sillons parallèles sur toute l'étendue de la surface à curer, etc. La forme de cette drague est aussi digne d'attention; les dessins en sont sous les yeux de la classe.

§. VIII.

Machines diverses mues par le moulin à draguer.

Le curage de l'avant-bassin des formes n'est pas la seule fonction du moulin à draguer qui en remplit d'autres encore, d'autant plus importantes qu'elles se rapportent à des objets de fabrication dont on a un besoin continuel dans les ports de marine militaire. C'est pour ces objets de fabrication que M. Hubert a adapté à son moulin d'autres machines qui emploient très-utilement la force du vent, pendant les intermittences du dragage.

La première de ces machines, placée au rez-de-chaussée, est un laminoir d'une parfaite exécution, et dont la composition, quoique

ne présentant pas d'idées absolument nouvelles, n'en offre pas moins plusieurs détails ingénieux. Un accident qui a un jour arrêté la rotation des cylindres, a donné lieu à une observation curieuse sur la force du moteur et sur la solidité de la machine. Un manchon de fer, gros comme la cuisse, servant à communiquer le mouvement au laminoir, s'est tordu d'un quart de circonférence, sur la longueur d'environ un mètre, et se serait infailliblement brisé, si l'action qui le tordait ainsi se fut continuée.

Un second mécanisme, établi au 3.me étage du moulin, fait mouvoir des meules à broyer les couleurs dont on se sert pour peindre l'extérieur et l'intérieur des vaisseaux. Quatre jeux de meules, accouplées deux à deux, sont ainsi mis en mouvement; l'inférieure de chaque couple est fixe, et la supérieure tourne autour d'un axe vertical.

Enfin, M. Hubert a réuni aux machines précédentes un tour à tourner les essieux des poulies, placé au deuxième étage du moulin, et qui se meut aussi par la force du vent.

Cet habile ingénieur est l'inventeur ou le constructeur de plusieurs autres machines dont nous nous dispenserons de parler, et parmi lesquelles on distingue la machine à tailler les vis et celle qu'on emploie pour changer les chiffres et les emblêmes des vitrages des vaisseaux. Il fait exécuter en ce moment à Rochefort un moulin à scies qui aura la propriété de diviser les bois non seulement en parties planes, mais suivant des surfaces développables quelconques.

§. IX.

Observations et conclusions.

La classe remarquera sans doute avec satisfaction que M. Hubert, à qui on doit les machines dont nous venons de donner une notice sommaire, et M. Dupin, l'un de ses correspondans, qui lui a fait connaître ces machines, et qui lui-même est auteur de plusieurs

ouvrages qu'elle a couronnés de son suffrage, sont deux anciens élèves de l'école polytechnique. Il est maintenant peu de branches soit des hautes sciences, soit des arts utiles aux services publics et à la société en général, qui ne doivent aux hommes sortis de cet établissement célèbre, ou quelque découverte ou quelque amélioration. Le mémoire de M. Dupin, dont il n'a lu qu'un extrait à la classe, prouve, par la clarté des descriptions et des détails instructifs qu'il y a joints, combien ce jeune savant sait tirer parti de ses voyages.

Quant aux machines de M. Hubert, leur utilité ne saurait être révoquée en doute, puisqu'elles sont toutes exécutées, employées à des travaux d'une grande importance, et que leur succès est parfaitement constaté par l'expérience. Les seuls objets de discussion auxquels elles peuvent donner lieu sont donc relatifs soit à la nouveauté des mécanismes, soit aux améliorations dont quelques-uns d'entre eux pourraient être susceptibles. Nous ferons, à cet égard, les observations suivantes :

1.° Dans la machine à éprouver la force des cables, le moyen d'évaluer l'effort qui a lieu, à chaque instant de la durée de l'expérience, nous paraît neuf; mais nous désirerions que la machine pût, en même temps, mesurer avec exactitude les allongemens correspondans du cable.

2.° Nous sommes convaincus que M. Hubert a tiré de son propre fond l'idée ingénieuse de son compteur; mais le célèbre M. REICHEMBACH, de Munich, a employé, depuis plusieurs années, un mécanisme semblable, dans les salines de BAVIÈRE.

3.° Il nous semble que, dans la machine à percer les parcs à boulets, on pourrait supprimer la vis, en complétant la mèche par une pièce en métal qui ne ferait que glisser, et qui serait en arrière de toute l'épaisseur du manchon qu'on veut enlever. Cette pièce rapprocherait la forme de l'outil de celle du foret pour les métaux, qui rend l'épaisseur du copeau indépendante de la pression. Au reste, cette machine n'en est pas moins très-ingénieuse et remarquable, par des détails nouveaux. La forme donnée au tranchant de la tar-

rière offre une nouvelle preuve de l'utilité que les arts peuvent tirer de la géométrie descriptive.

4.° Le porte-foret de la machine à percer des trous cylindriques dans le bois a quelque rapport avec celui que M. Leturc a adapté, il y a environ 30 ans, à la poulierie établie à Brest ; mais le mécanisme de M. Hubert mérite la préférence, pour la simplicité et la solidité.

5.° L'application du mécanisme précédent à l'incrustement des dez des poulies nous paraît également heureuse et nouvelle.

6.° M. Brunnel, mécanicien français, établi en Angleterre, a employé, à l'amirauté de Londres, une machine fort ingénieuse pour mortaiser les caisses des poulies, dont la description et la gravure se trouvent dans l'Encyclopédie de REÉSS ; ce moyen est différent de celui que M. Hubert a imaginé, et il serait à désirer qu'on eût quelques expériences propres à faire connaître les mérites respectifs des deux mécanismes.

On a employé, depuis long-temps, des va et vient qui ont plus ou moins d'analogie avec celui que cet ingénieur a adapté au levier de la machine dont nous parlons, parmi lesquels on peut citer celui de l'anglo-américain WHITE, décrit dans un rapport sur la machine de Marly, rédigé par deux d'entre nous; mais le pignon, mobile dans le mécanisme de White, est fixe dans celui de M. Hubert; et ce dernier mécanisme est de plus remarquable par un moyen neuf et ingénieux, employé pour maintenir la position et la verticalité de la denture mobile, pendant chaque montée et chaque descente.

Les formes données à la partie tranchante des ciseaux sont aussi dignes d'attention.

7.° Le système général des machines que le moulin à vent établi près des formes de Rochefort fait mouvoir, est une conception très-remarquable et qui honore son auteur, tant par l'heureuse combinaison des mécanismes que par l'art et la perfection de l'exécution. Deux d'entre nous ont vu le jeu de ces machines, dont on a obtenu

tout le succès désirable, et dont la marine militaire retire les avantages réunis et de l'économie dans la dépense et de la perfection du travail. Nous nous bornerons à citer, parmi les améliorations nouvelles qu'elles présentent, la forme de la drague. Cette drague était anciennement un petit traineau, armé d'un tranchant mobile auquel M. Hubert a substitué une espèce de roue à aubes, dont les augets, après s'être remplis de vase, dans la partie à curer, laissent échapper cette vase, dans le lieu destiné à son émission.

Nous pensons que le mémoire descriptif de M. Dupin lui mérite les remercîmens de la classe, et doit être imprimé parmi ceux des savans étrangers, en y joignant les gravures de ceux des dessins joints à ce mémoire qui seront jugés les plus propres à en faciliter l'intelligence.

Signé SANÉ, MOLARD, DE PRONY, *rapporteur.*

La classe approuve le rapport et en adopte les conclusions.

Paris, le 5 février 1816.

Certifié conforme à l'original, par le secrétaire perpétuel, chevalier de la légion d'honneur,

Signé DELAMBRE.

MÉCANIQUE CÉLESTE.

Recherche approximative des orbites des corps célestes, au moyen de trois ou d'un plus grand nombre d'observations peu distantes;

Par M. GERGONNE.

Dans un précédent mémoire (pag. 1), nous avons réduit la recherche des élémens de l'orbite d'un astre à celle des trois coordonnées de son centre, pour une époque déterminée quelconque, et de ses vitesses, pour la même époque, dans les directions de ces trois coordonnées. Examinons présentement comment, au moyen de trois ou d'un plus grand nombre d'observations, séparées les unes des autres par de courts intervalles de temps, on peut parveuir à des valeurs suffisamment approchées de ces six quantités.

Soient toujours prises respectivement, pour les axes des x, des y et des z positifs, les droites menées du centre du soleil à l'équinoxe du printemps, au solstice d'été et au pôle boréal de l'écliptique. En conservant, pour plus de simplicité, comme dans le mémoire cité, la notation des fonctions dérivées, et prenant toujours le temps pour variable indépendante; x, y, z seront les coordonnées du centre de l'astre, pour l'époque t, et ses vitesses, pour la même époque, suivant les directions de ces coordonnées, seront respectivement x', y', z'. En outre, nous continuerons de repré-

senter par μ le quarré du quotient qu'on obtient en divisant la longueur de la circonférence dont le rayon est *un* par la durée de l'année sydérale ; au moyen de quoi le demi-grand axe de l'orbite terrestre se trouvera être l'unité de mesure des longueurs. Quant à l'unité de mesure du temps, ce sera celle que l'on aura arbitrairement choisie pour exprimer la longueur de l'année sydérale.

En conséquence, les circonstances du mouvement de l'astre seront renfermées dans les équations

$$x^2+y^2+z^2=r^2\,, \qquad (1)$$

$$xz''-x''z=0\,,\quad yz''-y''z=0\,, \qquad (2)$$

$$r^3z''+\mu z=0\,.\ (*) \qquad (3)$$

Une observation, faite d'un lieu quelconque, fixera complètement la situation du rayon visuel dirigé de l'observateur vers l'astre ; de sorte que, si nous prenons pour les équations de ce rayon

$$x=mz+g\,;\quad y=nz+h\,, \qquad (4)$$

g, h, m, n seront des quantités assignables, mais variables, comme x, y, z, avec le temps t. En différentiant donc deux fois consécutivement les équations (4), on aura

$$x'=m'z+mz'+g'\,, \qquad y'=n'z+nz'+h'\,, \qquad (5)$$

$$x''=m''z+2m'z'+mz''+g''\,,\ y''=n''z+2n'z'+nz''+h''\,. \quad (6)$$

Si l'on suppose que β et γ soient, pour l'époque de l'observa-

---

(*) On a vu, dans le premier mémoire (pag. 1), que les équations du mouvement de l'astre étaient $x''=-\frac{\mu x}{r^3}$, $y''=-\frac{\mu y}{r^3}$, $z''=-\frac{\mu z}{r^3}$. Mais, en éliminant r^3 des deux premières, au moyen de la dernière, et chassant le dénominateur dans celle-ci, on parvient à celles que nous donnons ici.

tion



tion et pour le lieu de l'observateur, les longitude et latitude apparentes du centre de l'astre ; il est aisé de reconnaître qu'on aura

$$m=\text{Cos.}\beta\,\text{Cot.}\gamma\,,\quad n=\text{Sin.}\beta\,\text{Cot.}\gamma\,. \qquad (7)$$



Quant à g et h, ce sont évidemment les coordonnées du point où le plan de l'écliptique est percé par le rayon visuel. Il sera donc possible d'en déterminer les valeurs si, comme nous devons le supposer, l'on connaît, pour l'époque t, la situation de la terre par rapport à l'écliptique, et celle de l'observateur sur sa surface. Cette manière de calculer g et h aura, comme on le voit, l'avantage d'éliminer l'erreur provenant tant de la parallaxe inconnue de l'astre que de la petite latitude que le centre de la terre peut avoir, par rapport au plan moyen de l'écliptique.

Si l'on a trois ou un plus grand nombre d'observations, peu distantes entre elles ; en comptant les t depuis une époque à peu près moyenne entre celles des observations extrêmes ; on pourra, à l'aide des procédés connus d'interpolation, ou, mieux encore, par les méthodes indiquées (Tom. VI, pag. 242), construire les valeurs générales de g, h, m, n, fonctions rationnelles et entières de t, et en conclure ensuite, par deux différentiations consécutives, celles de g', g'', h', h'', m', m'', n', n''. Toutes ces valeurs seront ainsi suffisamment approchées, pour l'époque $t=0$ à laquelle on devra s'arrêter de préférence, afin de simplifier les calculs. Il sera donc permis, dans tout ce qui va suivre, de considérer toutes ces diverses fonctions comme absolument connues.

Si, comme on paraît y devoir être autorisé, dans une recherche de la nature de celle-ci, qui est purement approximative, on se permet de négliger la parallaxe de l'astre, ainsi que la petite latitude du centre de la terre ; β et γ deviendront proprement des longitude et latitude géocentriques, pour l'époque t. De plus, si l'on désigne par ρ le rayon vecteur de la terre, et par ϖ sa longitude, ou celle du soleil augmentée de deux angles droits, on aura

$$g=\varrho\text{Cos.}\varpi\ ,\quad h=\varrho\text{Sin.}\varpi\ ; \qquad (8)$$

d'où

$$g^2+h^2=\varrho^2\ ;$$

et en outre, par le principe de la gravitation

$$g''+\frac{\mu g}{r^3}=0\ ,\quad h''+\frac{\mu h}{r^3}=0\ ; \qquad (9)$$

équations qui pourront servir, dans la présente hypothèse, à simplifier les formules finales auxquelles conduira la solution du problème. On remarquera, au surplus, que, tout étant connu dans le mouvement de la terre, on peut profiter des circonstances particulières de ce mouvement pour déterminer directement et sans recourir à aucune sorte d'interpolation, les valeurs des fonctions g', g'', h', h'' qui doivent correspondre à l'époque $t=0$, ou à toute autre époque qu'on aura choisi. Mais, de quelque manière d'ailleurs que l'on juge devoir procéder à la détermination de ces quantités, cela ne changera absolument rien à la marche du problème qui nous occupe.

M. Laplace (*Mécanique céleste*, liv. II) prend pour données ϖ, β, γ, ϱ et leurs fonctions dérivées des deux premiers ordres, déduites d'un nombre suffisant d'observations; mais il paraît plus convenable de leur préférer les fonctions g, h, m, n faciles à déduire des premières, ainsi que leurs fonctions dérivées des deux premiers ordres; attendu que les fonctions de cette dernière sorte s'offrent, pour ainsi dire, d'elles-mêmes dans les équations du problème, et qu'elles s'y présentent seules.

M. Legendre (*Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes;* Paris, 1806), ayant senti quelque répugnance à employer des coefficiens différentiels déduits de l'interpolation, a préféré recourir à l'emploi de trois systèmes de valeurs de g, h, m, n, et des temps auxquels ils doivent correspondre. Mais, ce que nous avons dit (*Annales*, tom. VI, pag. 842) paraît de nature à dissiper tous les scrupules que l'on pourrait concevoir à ce sujet;

et d'ailleurs l'emploi des coefficiens différentiels conclus de l'observation, est le seul moyen qui paraisse s'offrir pour rendre le problème algébrique, sans recourir à aucune supposition étrangère aux lois générales de la gravitation.

Si l'on avait plus de trois observations, on pourrait pousser la recherche des coefficiens différentiels jusqu'aux valeurs de g''', h''', m''', n'''; et nous avons fait voir ailleurs (*Annales*, tom. II, pag. 1) qu'en joignant ces données aux douze autres, et supposant toujours d'ailleurs que l'observateur se meut sur l'écliptique même, on pourrait parvenir directement aux valeurs de x, x', y, y', z, z', par des formules du premier degré. Nous pensons que c'est là la seule manière légitime de simplifier la solution du problème; mais on sent fort bien que ceci ne saurait être raisonnablement admis qu'en théorie, et que, dans la pratique, on doit se défier de l'emploi des coefficiens différentiels du troisième ordre, qu'on ne saurait guère se promettre de déterminer avec une pécision suffisante.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, les *dix* équations (1, 2, 3, 4, 5, 6) ne renferment d'autres inconnues que les trois coordonnées x, y, z, les vitesses x', y', z', dans le sens de chacune d'elles, les forces accélératrices x'', y'', z'', suivant les mêmes directions, et enfin le rayon vecteur r; c'est-à-dire que ces équations sont précisément en même nombre que les inconnues qu'elles renferment; elles doivent donc nous donner, sans aucune supposition gratuite, les valeurs de ces inconnues, ou du moins des six premières, les seules qu'il nous importe de déterminer.

Le procédé à suivre pour les obtenir ne présente aucune difficulté; d'abord en chassant x, y, x'', y'' des équations (1 et 2), au moyen des équations (4 et 6), on trouve

$$r^2=(1+m^2+n^2)z^2+2(mg+nh)z+(g^2+h^2)\,, \qquad (10)$$

$$gz''=2m'zz'+m''z^2+g''z\,, \qquad (11)$$

$$hz''=2n'zz'+n''z^2+h''z\,; \qquad (12)$$

l'élimination de z' entre les deux dernières donnera

$$(m'h-n'g)z''=\{(m'n''-m''n')z+(m'h''-n'g'')\}z \;; \qquad (13)$$

mettant pour z'' dans celle-ci sa valeur donnée par l'équation (3) et divisant par z, on en tirera

$$r^3=-\frac{\mu(m'h-n'g)}{(m'n''-n'm'')z+(m'h''-n'g'')} \;; \qquad (14)$$

égalant enfin le cube de la valeur (10) de r^2 au quarré de la valeur (14) de r^3, on aura l'équation finale en z

$$\{(1+m^2+n^2)z^2+2(mg+nh)z+(g^2+h^2)\}^3=\frac{\mu^2(m'h-n'g)^2}{\{(m'n''-n'm'')z+(m'h''-n'g'')\}^2}, \quad (15)$$

laquelle monte, en général, au 8.e degré.

L'élimination de z'' entre les équations (11 et 12) donne ensuite

$$2(m'h-n'g)z'+(m''h-n''g)z=gh''-g''h \;,$$

d'où

$$z'=-\frac{(m''h-n''g)z-(gh''-g''h)}{2(m'h-n'g)} \;; \qquad (16)$$

ainsi, z étant déterminé par l'équation (15), on en conclura z' par cette dernière formule ; les équations (4 et 5) donneront ensuite x, x', y, y' ; le problème se trouvera donc complètement résolu.

Si l'on veut faire abstraction de la parallaxe de l'astre et de la petite latitude du centre de la terre, on aura

(7) $$1+m^2+n^2=\frac{1}{\text{Sin.}^2\gamma} \;,$$

(7 et 8) $$mg+nh=\rho\,\text{Cos.}(\alpha-\beta)\,\text{Cot.}\gamma \;,$$

(8) $$g^2+h^2=\rho^2 \;,$$

(9) $$m'h''-n'g''=-\frac{\mu}{\rho^3}(m'h-n'g)$$

(9) $$gh''-g''h=0 \;;$$

en conséquence, l'équation (15) deviendra

$$\{z^2+\varrho z\,\mathrm{Cos.}(\alpha-\beta)\,\mathrm{Sin.}\,2\gamma+\varrho^2\,\mathrm{Sin.}^2\gamma\}^3=\frac{\mu^2\varrho^6(m'h-n'g)^2\,\mathrm{Sin.}^6\gamma}{\{(m'n''-n'm'')\varrho^3z-\mu(m'h-n'g)\}^2}\;;\quad(17)$$

et on aura ensuite simplement

$$z'=-\frac{z}{\varrho}\cdot\frac{m''h-n''g}{m'h-n'g}\;.\qquad(18)$$

Il est aisé de voir que, par le développement, le dernier terme de l'équation (17) s'évanouira ; de sorte qu'après sa suppression et la division par z, elle ne s'élèvera plus qu'au 7.e degré seulement ; et, comme jamais la parallaxe de l'astre et la latitude du centre de la terre ne sauraient être fort considérables, il faut en conclure que, dans le cas général, l'une des racines réelles de l'équation (15) doit être fort petite, comparativement aux autres, et qu'on ne doit tenir aucun compte de celle-là. On voit, en même temps, que l'hypothèse actuelle dispense de l'emploi et conséquemment du calcul des fonctions g'', h''.

On voit donc que le problème qui nous occupe conduit naturellement à une équation du 8.e degré, ou tout au moins du 7.e ; et les divers modes de solution qu'on en a présenté ont principalement pour but d'éluder cette difficulté. Mais, après y avoir longuement et mûrement réfléchi, après avoir entrepris un grand nombre d'essais et de tentatives, il nous a paru que tout procédé différent de celui que nous venons de suivre serait toujours sujet à de très-graves objections ; et qu'au lieu de chercher à éviter la résolution de l'équation (15), il était beaucoup plus convenable de profiter de la forme particulière sous laquelle elle se présente pour rendre la détermination de ses racines réelles aussi peu laborieuse qu'il se pourrait. On peut remarquer, en effet, que cette équation n'a pas toute la complication que son degré comporte ; et que le point le plus important, et en même temps le plus difficile est d'obtenir une approximation grossière de ses racines réelles ; or, c'est à quoi on

peut parvenir assez aisément, soit par une trace graphique soit par le calcul, ainsi qu'on va le voir.

L'équation (15) est évidemment le résultat de l'élimination de p et q entre les trois équations

$$p^3=q^2\,; \qquad \text{(I)}$$

$$p=(1+m^2+n^2)z^2+2(mg+nh)z+(g^2+h^2)\,,$$

$$q=\frac{\mu(m'h-n'g)}{(m'n''-m''n')z+(m'h''-n'g'')}\,,$$

dont les deux dernières peuvent être écrites ainsi

$$\left\{z+\frac{mg+nh}{1+m^2+n^2}\right\}^2=\frac{1}{1+m^2+n^2}\left\{p-(g^2+h^2)+\frac{(mg+nh)^2}{1+m^2+n^2}\right\}, \qquad \text{(II)}$$

$$q\left\{z+\frac{m'h''-n'g''}{m'n''-m''n'}\right\}=\mu\frac{m'h-n'g}{m'n''-m''n'}\,. \qquad \text{(III)}$$

L'équation (I) est celle d'une seconde parabole cubique, tout à fait indépendante de la nature des données, et dont le paramètre est l'unité, c'est-à-dire, le demi-grand axe de l'orbite terrestre. En prenant donc une ligne droite, d'une longueur arbitraire, pour ce demi-grand axe, on pourra construire cette courbe avec soin, une fois pour toutes, et s'en servir pour tous les problèmes particuliers qu'on aura à résoudre (*).

(*) On peut tracer cette courbe sur le cuivre, et en tirer ensuite un nombre suffisant d'épreuves. C'est ainsi qu'on trouve chez M.me veuve Courcier, à Paris, des épreuves de la première parabole cubique que M. Monge combine avec la ligne droite pour obtenir les racines réelles de l'équation du 3.e degré sans second terme (Voyez la *Correspondance sur l'école polytechnique*, tom. III, page 201).

L'équation (II) est celle d'une parabole ordinaire dont l'axe, parallèle à celui des z, en est distant de la quantité

$$g^2+h^2-\frac{(mg+nh)^2}{1+m^2+n^2},$$

prise avec son signe, dont le sommet est distant de l'axe des p de la quantité

$$-\frac{mg+nh}{1+m^2+n^2};$$

prise également avec son signe, et dont enfin le paramètre est

$$\frac{1}{1+m^2+n^2}.$$

Enfin, l'équation (III) est celle d'une hyperbole équilatérale, dont l'une des asymptotes est l'axe des z lui-même, dont l'autre, parallèle à l'axe des q, en est distante de la quantité

$$-\frac{m'h''-n'g''}{m'n''-m''n'},$$

prise avec son signe; cette courbe est située dans les angles des coordonnées de mêmes signes ou dans ceux des coordonnées de signes contraires, suivant que la quantité

$$\mu\frac{m'h-n'g}{m'n''-n'm''};$$

est positive ou négative; et ses demi-axes sont égaux à la racine quarrée du double de cette quantité, prise positivement.

Cela posé, soient construites, sur deux axes rectangulaires, dont l'un, celui des abscisses, soit constamment l'axe des z, tandis que

celui des ordonnées sera successivement l'axe des p et l'axe des q; les courbes (II et III) (*).

Soit ensuite construite sur les axes même de la courbe (I), supposée déjà tracée, une seconde courbe, dont les coordonnées soient les coordonnées qui se correspondent dans les courbes (II et III) précédemment construites; cette seconde courbe coupera la première en plusieurs points, dont les coordonnées seront les valeurs de p et q. Considérant ensuite ces coordonnées comme ordonnées correspondantes du premier système de courbes; l'abscisse commune, répondant à chaque couple d'ordonnées, devra être prise pour valeur de z; en négligeant toutefois une valeur de z qui sera nulle ou du moins très-petite.

Si l'on voulait faire abstraction de la parallaxe de l'astre et de la latitude du centre de la terre, le procédé serait encore le même, sauf les petites modifications que voici: la distance de l'axe de la parabole ordinaire à l'axe des z serait

$$\varrho^2\{1-\mathrm{Cos.}^2(\alpha-\beta)\mathrm{Cos.}^2\gamma\},$$

la distance de son sommet à l'axe des p serait

$$-\tfrac{1}{2}\varrho\mathrm{Cos.}(\alpha-\beta)\mathrm{Sin.}2\gamma,$$

et son paramètre serait

$$\mathrm{Sin.}^2\gamma.$$

En outre, une des valeurs de z serait tout-à-fait nulle.

(*) Il existe un grand nombre de machines propres à tracer d'un mouvement continu, des sections coniques de toutes dimensions, entre des limites plus ou moins étendues. M. Deshayes, professeur de physique, d'abord au collége de Nancy, puis à l'école centrale de la Meurthe, mort depuis quelques années, mécanicien et opticien non moins adroit qu'habile géomètre, et à qui il n'a manqué qu'un peu moins de modestie pour se faire un nom parmi les savans, en avait construit une extrêmement ingénieuse et commode et d'une grande précision, que j'ai vu entre ses mains en 1788. J'ignore ce que cette machine est présentement devenue.

Nous

Nous ne prétendons pas que le procédé que nous venons d'enseigner soit susceptible d'une extrême précision ; mais il n'en est pas moins très-propre à faciliter la résolution de l'équation (15) ou de l'équation (17) dont on peut ensuite poursuivre une approximation plus exacte des racines, par la méthode de Newton, ou toute autre équivalente.

Au surplus, ceux qui manquent de goût ou d'adresse pour les procédés graphiques peuvent facilement remplacer celui-ci par des tables équivalentes. Il faudra d'abord construire un table générale, commune à toutes les applications qu'on voudra faire, laquelle devra contenir les valeurs correspondantes de p et q, déduites de l'équation (I). Pour plus de commodité on fera bien de construire cette table double, en prenant successivement p et q pour argumens.

Dans chaque application particulière, il faudra construire une seconde table à trois colonnes, celle des z, celle des p et celle des q, dont z sera l'argument, et qu'on remplira facilement au moyen des formules

$$p=(1+m^2+n^2)z^2+2(mg+nh)z+(g^2+h^2)\,, \quad q=\frac{\mu(m'h-n'g)}{(m'n''-m''n')z+(m'h''-n'g'')}\,,$$

ou de celles-ci de

$$p=z^2+\varrho z\text{Cos.}(\alpha-\beta)\text{Sin.}2\gamma+\varrho^2\text{Sin.}^2\gamma\,, \quad q=\frac{\mu\varrho^3(m'h-n'g)\text{Sin.}^3\gamma}{(m'n''-n'm'')\varrho^3z-\mu(m'h-n'g)}\,.$$

Cherchant alors dans cette dernière table des valeurs correspondantes de p et q qui soient les mêmes que dans la première, les valeurs de z auxquelles elles se trouveront appartenir seront les racines cherchées.

Nous ne nous sommes permis, dans tout ce qui précède, aucune supposition particulière sur la nature de la trajectoire ; il paraît en effet que, lorsqu'un astre n'est visible que dans une petite portion de son cours, tout ce qu'on en peut raisonnablement conclure c'est que cet astre décrit une section conique qui s'éloigne du cercle d'une

manière assez notable : or, l'hypothèse d'un mouvement parabolique, ou seulement à peu près tel, n'est, pour ainsi dire, qu'un infiniment petit dans le nombre de celles que cette circonstance autorise encore. Si même on considère combien il est rare de rencontrer une parabole qui satisfasse exactement à une longue suite d'observations; si l'on considère que l'hypothèse rectiligne de Képler a quelquefois été employée avec assez de succès au calcul des éphémérides; si, enfin, on songe au petit nombre des comètes dont on a pu observer plusieurs retours, on sera fort tenté de croire que les orbites de beaucoup d'entre elles pourraient fort bien être hyperboliques. Nous sommes d'ailleurs d'autant plus fondés à rejeter l'hypothèse parabolique que, si elle peut simplifier le calcul d'un éphéméride, elle est d'un bien faible secours dans la recherche des élémens, du moins lorsqu'on y procède comme nous l'avons fait ici.

Dans un prochain article nous appliquerons notre méthode à un exemple.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Théorèmes nouveaux, sur les lignes et surfaces du second ordre;

Par M. Frégier, ancien élève de l'école polytechnique.

J'ai donné, à la page 229 du VI.e volume de ce recueil, sur les lignes et surfaces du second ordre, deux théorèmes nouveaux, assez remarquables, que j'ai généralisés ensuite, à la page 321 du même volume. Je me suis aperçu postérieurement que ces théorèmes étaient susceptibles d'une généralisation beaucoup plus grande encore; et c'est sous ce nouveau point de vue que je vais les reproduire ici.

THÉORÈME I. *Si deux lignes du second ordre, tracées sur un même plan, sont telles que le centre de la seconde soit situé sur le périmètre de la première; toutes les cordes qui, dans celle-ci, se termineront à ses intersections avec les prolongemens de deux diamètres conjugués de l'autre, se couperont en un même point, situé sur le conjugué du diamètre qui, dans la seconde courbe, est tangent à la première.*

Démonstration. Soient pris pour axes des coordonnées les deux diamètres conjugués de la seconde courbe, dont l'un est tangent à la première, de manière que ce dernier soit l'axe des y. L'équation de la première courbe sera de la forme

$$y^2+x(Ax+By+C)=0 \ . \qquad (1)$$

Les équations des deux diamètres conjugués de la seconde seront de la forme

$$y=mx \ ; \qquad y=m'x \ ; \qquad (2)$$

avec la condition

$$mm'=k \ ; \qquad (3)$$

k étant une constante. L'équation du système de ces deux diamètres sera donc

$$(y-mx)(y-m'x)=y^2-(m+m')xy+mm'x^2=0 \ ,$$

ou

$$y^2-(m+m')xy+kx^2=0 \ ; \qquad (4)$$

retranchant cette dernière équation de l'équation (1), il viendra, en divisant par x,

$$(A-k)x+(B+m+m')y+C=0 \ ; \qquad (5)$$

équation d'une droite qui est évidemment la corde qui, dans (1), joint ses points d'intersection avec le système de diamètres (4). Or, si, dans la vue de savoir en quel point cette droite coupe l'axe des x, on fait dans son équation $y=0$, on en tirera

$$x=-\frac{C}{A-k} \ ,$$

quantité constante, tout-à-fait indépendante du système de diamètre conjugué qu'on a choisi; ce qui démontre complètement le théorème énoncé.

THÉORÈME II. Si deux surfaces du second ordre sont tellement situées dans l'espace, que le centre de la seconde soit sur la première, tous les plans sécants à celle-ci qui passeront par les points où elle est traversée par les prolongemens de trois diamètres conjugués quelconques de l'autre, se couperont en un même point, situé sur le diamètre de la seconde surface dont les conjugués sont tangens à la première.

Démonstration. Soient Σ la première surface, S la seconde, et O le centre de celle-ci, situé sur l'autre. Concevons, par ce centre, trois diamètres conjugués dont les directions rencontrent Σ en A, B, C. Imaginons ensuite que l'on passe de ce système de diamètres conjugués à un autre, dans lequel les directions des diamètres rencontrent Σ en A', B', C; c'est-à-dire, de manière que le diamètre dont la direction est OC soit commun aux deux systèmes. Il est connu que les deux angles AOB, A'OB' seront dans un même plan.

Soient σ et s les lignes du second ordre suivant lesquelles ce plan coupe les surfaces Σ et S. Soit T le plan tangent à Σ en O; et soit enfin t la droite suivant laquelle ce plan est coupé par le plan des angles AOB, A'OB'; cette droite t sera tangente à σ en O.

Cela posé; s est une ligne du second ordre, située dans le même plan avec σ, et ayant son centre sur son périmètre; et OA', OB', aussi bien que OA, OB, sont les directions de deux diamètres conjugués de cette courbe; d'où il suit (*Théorème I*) que les deux cordes AB, A'B' se couperont en quelque point P du diamètre de s dont le conjugué est t; et que ce point P sera tout-à-fait fixe et indépendant de la situation du second système par rapport au premier.

Donc aussi les deux plans ACB, A'CB', qui passent constamment par les deux points fixes C, P, se couperont constamment suivant une droite CP, fixe comme ces deux points, et tout-à-fait indépendante de la situation respective des deux plans.

OP et t sont donc deux conjugués de OC; d'où il suit que, réciproquement, OC et OP sont deux conjugués de t; donc, par les théories connues, tous les autres conjugués de t sont situés dans

le plan COP ; or, le diamètre de S dont tous les conjugués sont situés dans le plan T est aussi un conjugué de t ; donc aussi ce diamètre est dans le plan COP, et coupe conséquemment la droite CP en quelque point Q.

Il demeure donc établi par là que le système de diamètres conjugués dont les directions sont OA, OB, OC, venant à varier d'une manière quelconque, de sorte cependant que l'un d'eux reste fixe, le plan ABC coupera constamment, en un même point fixe, le diamètre de S dont tous les conjugués sont dans le plan T ; et, comme il est d'ailleurs connu qu'on peut toujours passer d'un système de diamètres conjugués à un autre quelconque, au moyen de trois transformations successives telles que, dans chacune d'elles, un des diamètres reste fixe (*), il s'ensuit que le théorème est complètement démontré.

(*) Cette proposition peut facilement être établie comme il suit :

Soient A, B, C trois demi-diamètres conjugués ; et soient A″, B″, C″ trois autres demi-diamètres conjugués, totalement différens des premiers.

Soit B′ la droite suivant laquelle se coupent les plans de BC et de A″B″ ; et soit C′ la droite suivant laquelle se coupent les plans AC″ et BC. B′ étant dans le plan BC sera l'un des conjugués de A, qui, réciproquement, sera l'un des siens ; mais, parce que B′ est dans le plan A″B″ sera aussi l'un des conjugués de C″ ; donc, le plan AC′ sera le plan des conjugués de B′ ; puis donc que le plan B′C′ est également le plan des conjugués de A ; il s'ensuit que A, B′, C′ forme un système de diamètres conjugués, ayant le demi-diamètre A commun avec le premier.

Soit A′ la droite suivant laquelle se coupent les plans AC′ et A″B″ ; A′B′ étant le plan des conjugués de C″, et A′C″ le plan des conjugués de B′ ; il s'ensuit que A′, B′, C″ forment un système de diamètres conjugués, ayant le diamètre B′ commun avec le second.

Enfin, A″, B″, C″ est un quatrième système de diamètres conjugués ayant le diamètre C″ commun avec le troisième ; ce qui démontre complètement la proposition annoncée.

On peut déduire bien simplement de ces considérations une propriété remarquable des diamètres conjugués. Supposons, par exemple, pour fixer les idées, qu'il soit question de l'*ellipsoïde* ; et considérons les quatre systèmes

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Géométrie.

COUPER un cube en deux parties, de telle manière que la section vienne se terminer aux diagonales inverses de deux faces opposées,

---

A , B , C ,

A , B′ , C′ ;

A′ , B′ , C″ ,

A″ , B″ , C″ ;

nous aurons, par la propriété connue de l'ellipse,

$$B'^2+C'^2=B^2+C^2 ;$$

$$A'^2+C''^2=A^2+C'^2 ;$$

$$A''^2+B''^2=A'^2+B'^2 ;$$

et que l'aire de cette section, terminée à la surface du cube, soit un *minimum*?

Donner, en outre, l'équation de la courbe suivant laquelle la surface coupante coupe chacune des autres faces de ce cube?

---

d'où, en ajoutant et réduisant

$$A''^2+B''^2+C''^2=A^2+B^2+C^2\ ;$$

théorème connu. Il ne serait peut-être pas difficile de démontrer, par cette voie, les deux autres théorèmes relatifs aux diamètres conjugués.

J. D. G.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Méthode nouvelle pour quarrer les courbes, et intégrer, entre des limites données, toute fonction différentielle d'une seule variable ;

Par M. Bérard, principal du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

M. Kramp a publié (*Annales de mathématiques*, tom. VI, pag. 281) une méthode ingénieuse, dont la première idée est due à M. d'Obenheim, pour intégrer, entre des limites données, toutes sortes de fonctions à une seule variable. L'esprit de cette méthode consiste à décomposer le trapèze curviligne qu'on veut quarrer, successivement en 2, 3, 4, 6 et 12 autres trapèzes ; on a ainsi des aires qui approchent de plus en plus de la véritable aire qu'on cherche. On imagine ensuite que ces aires sont les ordonnées d'une courbe qui se rapproche, de plus en plus, d'une ligne asymptotique, et l'ordonnée de cette courbe correspondante à $x=0$ est une valeur très-approchée de l'aire cherchée.

Il faut cependant convenir que cette méthode a quelque chose d'empirique qui ne satisfait pas pleinement l'esprit. L'équation par laquelle on lie les aires successives aux termes de la série est entièrement arbitraire ; les résultats que l'on obtient varient suivant la loi des exposans de x, dans la valeur générale de y ; loi qui semblerait devoir varier suivant les différens cas. Il arrive donc ainsi

que cette méthode ne procure pas réellement le degré d'exactitude qu'on croirait être en droit d'en attendre (*).

M. Gergonne, dans un mémoire qui fait suite à celui de M. Kramp, a proposé un perfectionnement qui repose sur une idée séduisante, mais qui malheureusement ne réussit qu'imparfaitement, et quelquefois même éloigne du but. Ce géomètre cherche diverses aires de plus en plus approchées, à la manière de M. Kramp, en employant successivement différens diviseurs. Il considère ensuite ces aires diverses comme les termes d'une nouvelle série, dont il cherche, toujours par les formules de M. Kramp, le terme qui répond à $x=0$. Ce procédé est inexact, parce que la loi qui lie les termes de la nouvelle série est inconnue, et que l'hypothèse qu'on adopte arbitrairement ne saurait réussir qu'imparfaitement ou par hasard. Aussi, si l'on applique cette extension de la méthode à la recherche du logarithme de 2, en employant 17 ordonnées, on trouve des résultats qui s'éloignent de plus en plus de la vérité, à mesure qu'on pousse plus loin le procédé.

M. Kramp paraît avoir reconnu les inconvéniens de sa première méthode, puisqu'il en a proposé une autre (tom. VI, pag. 372). Cette seconde méthode paraît en effet préférable à la première; elle consiste (**) à faire passer par un certain nombre de points donnés, sur la courbe proposée, une courbe parabolique $y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+....$; cette courbe parabolique coïncide d'autant

(*) L'observation critique de M. Bérard est très-juste; mais elle porte malheureusement sur toutes les méthodes connues d'interpolation, dont pourtant on ne saurait se passer. On verra, au surplus, que le procédé que M. Bérard substitue à celui de M. Kramp n'est pas lui-même exempt d'arbitraire, et conséquemment d'empirisme. Il serait même assez difficile de concevoir que cela pût être autrement; attendu que cela tient intimement à la nature de la question.

J. D. G.

(**) M. Lacroix (*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, tom. II, page 141) annonce, pour son troisième volume, une méthode à peu près semblable. (*Note de l'auteur*).

mieux avec la courbe à quarrer, que le nombre des ordonnées cherchées est plus grand; et il ne s'agit plus ensuite que d'intégrer la formule ydx, composée alors d'une suite de monomes intégrables.

D'après ce principe, M. Kramp a calculé douze formules, correspondant aux cas où l'on connaît 2, 3, 4,...... 12 ou 13 ordonnées de l'espace à quarrer. L'usage de ces formules est très-simple. La substitution des valeurs connues des ordonnées donne, sur-le-champ, l'aire cherchée $\int Xdx$, plus exactement et plus brièvement que par les séries ou toute autre méthode connue.

M. Kramp s'est arrêté à la formule relative à 13 ordonnées: « J'aurais désiré, dit-il, de pouvoir continuer cette table, jusqu'au » diviseur 24; mais l'immensité du travail m'a effrayé. Il doit sans » doute y avoir quelque méthode beaucoup plus abrégée que celle » que nous avons suivie; mais, jusqu'ici du moins, je l'ai cherchée » vainement. »

M. Kramp n'ayant pu trouver les formules relatives à un nombre d'ordonnées plus grand que 13, a cherché à y suppléer, en combinant les formules de son tableau; mais le surcroît d'exactitude qui en est résulté n'est pas assez important pour ne rien laisser à désirer. J'ai donc cherché à perfectionner un travail si utile; j'ai vaincu la difficulté qui avait arrêté M. Kramp; et j'ai eu la satisfaction de rencontrer une nouvelle manière de procéder, qui n'a rien de commun avec celle de cet habile géomètre, et qui permet de pousser l'approximation aussi loin qu'on le désire.

§. I. *Exposé d'une nouvelle méthode.*

Le problème qui nous occupe peut être énoncé ainsi:

PROBLÈME. *Connaissant les deux ordonnées extrêmes d'un arc de courbe, ainsi que plusieurs ordonnées intermédiaires équidistantes; exprimer, en fonction de ces ordonnées, et de l'intervalle commun qui les sépare, l'aire mixtiligne comprise entre les deux ordonnées extrêmes, la courbe et l'axe des x?*

La solution de ce problème sera aussi celle du problème de l'intégration des fonctions d'une seule variable, entre des limites données; puisque intégrer Xdx, c'est quarrer la courbe qui a pour équation $y=X$.

Solution. Soient en général y_0, y_1, y_2, ... y_n les ordonnées connues et équidistantes de la courbe $y=X$ qu'il s'agit de quarrer entre les limites y_0 et y_n. Pour plus de simplicité, prenons pour unité l'intervalle commun qui sépare les ordonnées consécutives, et supposons que la première y_0 réponde à l'abcisse $x=0$. Soit enfin S l'aire cherchée $=\int Xdx$.

Pour fixer les idées, supposons les ordonnées données au nombre de *sept* seulement. Ce que nous dirons de ce cas particulier pourra facilement s'appliquer à tout autre.

1.° Je remarque que, quelle que soit la valeur de chacun des coefficiens de la formule que nous cherchons, les ordonnées également éloignées des extrêmes doivent y jouer le même rôle; puisque la première peut être prise pour la dernière, *et vice versa*: ainsi, par exemple, y_2 et y_4 doivent avoir le même coefficient.

Cette observation réduit de moitié le nombre des coefficiens à trouver, et prouve que la formule doit être de cette forme:

$$S=A(y_0+y_6)+B(y_1+y_5)+C(y_2+y_4)+Dy_3 . \qquad \text{(F)}$$

2.° Les coefficiens inconnus A, B, C, D, doivent être tels que, quand la courbe proposée $y=X$ est quarrable, la formule (F) donne, pour l'aire S, une valeur numérique, connue et exacte. Ainsi, il est nécessaire et suffisant que ces coefficiens satisfassent à quatre cas particuliers, que l'on pourra d'ailleurs prendre d'une infinité de manières différentes; mais parmi lesquels on fera bien de choisir les plus simples, pourvu qu'elles soient distinctes et qu'elles ne soient pas comportées les unes par les autres.

3.° Supposons, pour premier cas particulier, que la ligne à quarrer est une droite, parallèle à l'axe des x, dont elle est éloignée de la quantité 1. L'intervalle entre les ordonnées extrêmes étant 6,

l'espace à quarrer sera un rectangle $=6$. La formule (F) deviendra donc

$$6=2A+2B+2C+D\ . \qquad (1)$$

4.° Supposons, pour deuxième cas particulier, que la ligne à quarrer est une parabole ordinaire, touchant l'axe des x au milieu de l'intervalle qui sépare les ordonnées extrêmes, et passant par les extrémités supérieures de ces ordonnées, que nous supposerons, comme ci-dessus, égales entre elles et à l'unité.

En supposant, pour un moment, l'origine transportée au point de contact, et remarquant que l'on doit avoir $y=1$, lorsqu'on fait $x=\pm3$, l'équation de cette parabole sera $y=\frac{x^2}{9}$; son aire sera $\int y\mathrm{d}x=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{9}=\frac{x^3}{27}$ qui, prise jusqu'à $x=3$, donnera 1 pour la moitié de la surface dont il s'agit, de manière que cette surface S sera 2.

Au moyen de l'équation $y=\frac{x^2}{9}$, on trouvera de plus

$$y_0=y_6=1\ ,\quad \text{d'où}\quad y_0+y_6=2\ ;$$
$$y_1=y_5=\tfrac{4}{9}\ ,\quad \text{d'où}\quad y_1+y_5=\tfrac{8}{9}\ ;$$
$$y_2=y_4=\tfrac{1}{9}\ ,\quad \text{d'où}\quad y_2+y_4=\tfrac{2}{9}\ ;$$
$$y_3=0\ .$$

En conséquence, on aura, par la substitution dans la formule (F), $2=2A+\frac{8}{9}B+\frac{2}{9}C$; c'est-à-dire,

$$9=9A+4B+C\ . \qquad (2)$$

5.° Supposons, pour troisième cas particulier, que la ligne à quarrer est une parabole du quatrième degré, assujettie d'ailleurs aux mêmes conditions que la précédente; en la rapportant à la même origine, elle aura pour équation $y=\frac{x^4}{81}$ d'où $S=\int\frac{x^4\mathrm{d}x}{81}=\frac{x^5}{5.81}$; ce qui donne, entre les limites $+3$ et -3, $S=\frac{6}{5}$. On a de plus

$$y_0=y_6=1\ ,\quad \text{d'où}\quad y_0+y_6=2\ ;$$
$$y_1=y_5=\tfrac{16}{81}\ ,\quad \text{d'où}\quad y_1+y_5=\tfrac{32}{81}\ ;$$
$$y_2=y_4=\tfrac{1}{81}\ ,\quad \text{d'où}\quad y_2+y_4=\tfrac{2}{81}\ ;$$
$$y_3=0\ .$$

On aura donc, par la substitution dans la formule (F), $\frac{6}{5}=2A+\frac{32}{81}B+\frac{2}{81}C$; c'est-à-dire,

$$243=5A+80B+5C\ . \qquad (3)$$

6.° Prenons enfin pour dernière courbe, et toujours sous les mêmes conditions, la parabole du sixième degré $y=\dfrac{x^6}{729}$. Nous aurons d'abord $S=\int\dfrac{x^6dx}{729}=\dfrac{x^7}{7\cdot729}$; ce qui donnera définitivement $S=\frac{6}{7}$. Nous aurons ensuite

$$y_0=y_6=1\ ,\quad \text{d'où}\quad y_0+y_6=2\ ;$$
$$y_1=y_5=\tfrac{64}{729}\ ,\quad \text{d'où}\quad y_1+y_5=\tfrac{128}{729}\ ;$$
$$y_2=y_4=\tfrac{1}{729}\ ,\quad \text{d'où}\quad y_2+y_4=\tfrac{2}{729}\ ;$$
$$y_3=0\ .$$

Il viendra donc, en substituant dans la formule (F), $\frac{6}{7}=2A+\frac{128}{729}B+\frac{2}{729}C$; c'est-à-dire,

$$2187=5103A+448B+7C\ . \qquad (4)$$

7.° Nous avons donc, pour déterminer A, B, C, D, les quatre équations

$$6=2A+2B+2C+D\ ,$$
$$9=9A+4B+C\ ,$$
$$243=405A+80B+5C\ ,$$
$$2187=5103A+448B+7C\ ;$$

desquelles on tire, par l'élimination,

$$A=\tfrac{41}{140}\,,\ B=\tfrac{216}{140}\,,\ C=\tfrac{27}{140}\,,\ D=\tfrac{272}{140}\,;$$

substituant ces valeurs dans la formule (F), après avoir multiplié S par 6, ce qui revient à prendre pour unité l'intervalle qui sépare les ordonnées extrêmes, on aura enfin

$$840S=41(y_0+y_6)+216(y_1+y_5)+27(y_2+y_4)+272y_3\,. \qquad (F_6)$$

On procèdera de la même manière, pour trouver les formules qui doivent correspondre à un autre nombre d'ordonnées ou de divisions de l'intervalle qui sépare les ordonnées extrêmes; ainsi, par exemple, pour 9 ordonnées ou 8 divisions, on emploîra les paraboles des 2.e, 4.e, 6.e et 8.e degrés, et de plus la parallèle à l'axe des x.

Tout autre système de courbes employé à la recherche des valeurs numériques des coefficiens, exigerait une élimination plus laborieuse; et les formules auxquelles il conduirait, différentes de celles-ci, seraient en général moins exactes.

Il serait sans doute aussi fastidieux que superflu de transcrire ici tous les calculs qui ont servi à former le tableau que nous allons présenter, et qui offre le recueil de toutes les formules qui peuvent être utiles dans la pratique, uniformément déduites du procédé général que nous venons de faire connaître. Cependant, comme celle relative à 25 ordonnées, ou au diviseur 24 est, par son exactitude, la plus importante de toutes, et en même temps la plus longue à trouver, puisqu'elle exige environ 100 heures de calcul; je crois devoir, à son sujet, indiquer brièvement la marche du procédé, afin qu'on puisse facilement, au besoin, la vérifier, ou même la retrouver. Les applications que j'en ai faites à plusieurs exemples, et les résultats que j'en ai obtenus, semblent, au surplus, en garantir suffisamment l'exactitude.

On voit d'abord que la formule doit être de cette forme

$$S=A(y_0+y_{24})+B(y_1+y_{23})+C(y_2+y_{22})+\ldots+Ny_{12}\,; \qquad (F_{24})$$

et qu'il faut 13 cas particuliers pour déterminer les 13 coefficiens

A, B, C, ... N. Le premier de ces cas sera, comme ci-dessus, une droite parallèle à l'axe des x, et distante d'elle d'une quantité égale à l'unité.

On imaginera ensuite une série de paraboles des 2.e, 4.e, 6.e, ... 24.e degrés, ayant toutes leur sommet sur l'axe des x, au milieu de l'intervalle qui sépare les ordonnées extrêmes, touchant cet axe en ce point, et ayant conséquemment leur axe commun parallèle à l'axe des y. Chacune d'elles passera d'ailleurs par les extrémités supérieures des deux ordonnées extrêmes, supposées égales entre elles et à l'unité. En transportant l'origine à ce sommet, les équations de ces paraboles seront

$$y=\frac{x^2}{12^2}, \quad y=\frac{x^4}{12^4}, \quad y=\frac{x^6}{12^6}, \ldots\ldots\ldots y=\frac{x^{24}}{12^{24}}.$$

En faisant l'intervalle qui sépare les ordonnées extrêmes $=24$, on calculera, pour toutes ces paraboles, les valeurs de S, prises entre ces mêmes ordonnées, lesquelles seront, y compris la parallèle à l'axe des x,

$$\frac{24}{1}, \frac{24}{3}, \frac{24}{5}, \frac{24}{7}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{24}{25}.$$

On calculera enfin, pour ces mêmes paraboles, les 24 ordonnées, égales deux à deux. Leur substitution successive, ainsi que celle des valeurs correspondantes de S, dans la formule (F_{24}), conduira aux 13 équations que voici, dont la symétrie est remarquable,

$$2\,A+2\,B+2\,C+2\,D+\ldots\ldots+2\,L-2M+N=24, \quad (1)$$

$$12^2.A+11^2.B+10^2.C+9^2.D+\ldots\ldots+2^2.L+M=\frac{12^3}{3}, \quad (2)$$

$$12^4.A+11^4.B+10^4.C+9^4.D+\ldots\ldots+2^4.L+M=\frac{12^5}{5}, \quad (3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$12^{22}.A+11^{22}.B+10^{22}.C+9^{22}.D+\ldots\ldots+2^{22}.L+M=\frac{12^{23}}{23}, \quad (12)$$

$$12^{24}.A+11^{24}.B+10^{24}.C+9^{24}.D+\ldots\ldots+2^{24}.L+M=\frac{12^{25}}{25}. \quad (13)$$

On éliminera M, en retranchant successivement (2) de (3), (3) de

de (4), (4) de (5), ... (12) de (13); il en résultera 11 équations, entre lesquelles on éliminera L, en combinant encore deux à deux les équations qui se suivront immédiatement; on continuera ainsi à éliminer K, I, H, G, ..., jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la valeur de A, d'où l'on conclura ensuite, en remontant, celles de B, C, D, ..., M; et on obtiendra enfin celle de N, au moyen de l'équation (1). Il faudra ensuite diviser chaque coefficient ou, ce qui revient au même, multiplier S par 24, afin que l'intervalle entre les ordonnées extrêmes, que nous avions d'abord supposé égal à ce nombre, devienne égal à l'unité.

Dans le tableau suivant, l'indice qui accompagne la lettre F désigne le diviseur qui sert de base à la formule correspondante; ainsi, l'expression (F_6) signifie que l'intervalle 1 entre les ordonnées extrêmes y_0 et y_6, a été partagé en 6 parties égales, ou qu'il y a 7 ordonnées. La lettre S représente toujours $\int X dx$, c'est-à-dire, l'aire cherchée.

§. II. *Recueil de formules.*

(F_1) $2S=(y_0+y_1)$;

(F_2) $6S=(y_0+y_2)+4y_1$

(F_3) $8S=(y_0+y_3)+3(y_1+y_2)$;

(F_4) $90S=7(y_0+y_4)+32(y_1+y_3)+12y_2$;

(F_5) $288S=19(y_0+y_5)+75(y_1+y_4)+50(y_2+y_3)$;

(F_6) $840S=41(y_0+y_6)+216(y_1+y_5)+27(y_2+y_4)+272y_3$;

(F_8) $28350S=989(y_0+y_8)+5888(y_1+y_7$

$-928(y_2+y_6)+10496(y_3+y_5)-4540y_4$.

$$(F_{12})\quad 63063000\,S = 1364651(y_0+y_{12})$$
$$+\ 9903168(y_1+y_{11})$$
$$-\ 7587864(y_2+y_{10})$$
$$+35725120(y_3+y_9)$$
$$-51491295(y_4+y_8)$$
$$+87516288(y_5+y_7)$$
$$-87797136\,y_6\,.$$

$$(F_{24})\quad 3693\;08773\;59626\;25000\;S=$$
$$+\quad 35\;20096\;97351\;90093\;(y_0+y_{24})$$
$$+\quad 379\;27038\;82616\;11008\;(y_1+y_{23})$$
$$-\quad 1043\;44495\;56532\;09152\;(y_2+y_{22})$$
$$+\quad 5985\;25999\;93685\;55008\;(y_3+y_{21})$$
$$-\quad 23348\;69804\;87731\;57032\;(y_4+y_{20})$$
$$+\quad 78144\;92981\;50046\;56128\;(y_5+y_{19})$$
$$-\ 2\;15016\;22136\;90572\;52032\;(y_6+y_{18})$$
$$+\ 4\;99068\;08728\;71868\;84608\;(y_7+y_{17})$$
$$-\ 9\;81114\;32053\;02814\;65657\;(y_8+y_{16})$$
$$+16\;49142\;12661\;27302\;24128\;(y_9+y_{15})$$
$$-23\;80252\;12883\;70579\;60192\;(y_{10}+y_{14})$$
$$+29\;62867\;29026\;88547\;86048\;(y_{11}+y_{13})$$
$$-31\;86001\;61546\;46751\;00912\;y_{12}\,.$$

Les cinq premières formules sont presque sans utilité dans la pratique, parce qu'elles donnent une approximation trop bornée : la 6.me servira dans les cas les plus ordinaires, ainsi que la 8.me,

la 12.me devra être employée dans le cas où l'on voudra avoir environ 10 chiffres décimaux exacts : enfin, on ne devra faire usage de la 24.me que dans les cas, extrêmement rares, où l'on voudra pousser l'exactitude jusqu'à 16 à 18 chiffres.

Dans des cas extraordinaires, où l'on aurait besoin d'une approximation encore plus grande, on pourrait calculer une formule pour 49 ordonnées : il ne faudrait pour cela que du temps et de la patience; on peut aussi, quoique moins parfaitement, remplir le même but, en partageant l'intervalle des ordonnées extrêmes en un certain nombre de parties égales, dont chacune soit ensuite subdivisée en 24; en appliquant ensuite à chaque groupe de 24 divisions la formule (F_{24}) : en voici un exemple.

Je suppose l'intervalle total partagé en 120 parties égales, par 121 ordonnées. En représentant, pour abréger, par p, a, b, c, d, ... n, respectivement, les nombres de la formule (F_{24}), on obtiendra, sans difficulté, la formule suivante :

$$(F_{120}) \qquad 5pS = a(y_0+2y_{24}+2y_{48}+2y_{72}+2y_{96}+y_{120})$$
$$+b(y_1+y_{23}+y_{25}+y_{47}+y_{49}+y_{71}+y_{73}+y_{95}+y_{97}+y_{119})$$
$$-c(y_2+y_{22}+y_{26}+y_{46}+y_{50}+y_{70}+y_{74}+y_{94}+y_{98}+y_{118})$$
$$+d(y_3+y_{21}+y_{27}+y_{45}+y_{51}+y_{69}+y_{75}+y_{93}+y_{99}+y_{117})$$
$$-e(y_4+y_{20}+y_{28}+y_{44}+y_{52}+y_{68}+y_{76}+y_{92}+y_{100}+y_{116})$$
$$+f(y_5+y_{19}+y_{29}+y_{43}+y_{53}+y_{67}+y_{77}+y_{91}+y_{101}+y_{115})$$
$$-g(y_6+y_{18}+y_{30}+y_{42}+y_{54}+y_{66}+y_{78}+y_{90}+y_{102}+y_{114})$$
$$+h(y_7+y_{17}+y_{31}+y_{41}+y_{55}+y_{65}+y_{79}+y_{89}+y_{103}+y_{113})$$
$$-i(y_8+y_{16}+y_{32}+y_{40}+y_{56}+y_{64}+y_{80}+y_{88}+y_{104}+y_{112})$$
$$+k(y_9+y_{15}+y_{33}+y_{39}+y_{57}+y_{63}+y_{81}+y_{87}+y_{105}+y_{111})$$
$$-l(y_{10}+y_{14}+y_{34}+y_{38}+y_{58}+y_{62}+y_{82}+y_{86}+y_{106}+y_{110})$$
$$+m(y_{11}+y_{13}+y_{35}+y_{37}+y_{59}+y_{61}+y_{83}+y_{85}+y_{107}+y_{109})$$
$$-n(y_{12}+y_{36}+y_{60}+y_{84}+y_{108}).$$

Dans l'emploi de toutes ces formules, il faut remarquer que, si l'intervalle entre les ordonnées extrêmes, qui y est pris pour unité, se trouvait, en général, être a, il faudrait multiplier par a la valeur de S donnée par la formule.

Il est une autre remarque assez importante. Si la courbe à quarrer présente un point d'inflexion, entre les limites de l'intégrale cherchée, il sera bon d'évaluer séparément les portions d'aire situées de part et d'autre de ce point; car le défaut de cette attention ne pourrait qu'altérer sensiblement l'exactitude du résultat. On verra ci-après comment M. Kramp, pour avoir négligé cette remarque, a été conduit à de fausses conséquences, et a cru apercevoir un paradoxe là où il n'en existait pas. Il est presque superflu d'observer qu'il faudrait, à plus forte raison, en user ainsi, si, entre les limites de l'intégrale, la courbe offrait un ou plusieurs points de rebroussement.

§. III. *Application des formules.*

Il nous reste une dernière tâche à remplir : il faut soumettre nos formules à l'expérience qui est la vraie pierre de touche de toutes les théories (*).

Nous prendrons, pour 1.re application, la recherche du logarithme hyperbolique de 2, c'est-à-dire, en d'autres termes, la recherche de l'intégrale de $\frac{dx}{x}$, entre $x=1$ et $x=2$, ou encore la quadrature de l'hyperbole $y=\frac{1}{x}$, entre les mêmes limites.

(*) L'expérience est, en effet, la vraie pierre de touche des méthodes empiriques; et nous sommes malheureusement réduis à employer souvent de telles méthodes; mais les véritables théories peuvent se passer de cette sanction; et l'on n'a nullement besoin d'expérience pour être assuré, par exemple, que la surface de la sphère est quadruple de celle de l'un de ses grands cercles. Il est bien vrai que le peuple répète souvent, d'après des gens qui prétendent n'être point peuple, qu'*expérience passe science*; mais il serait fort à désirer que les géomètres pussent constamment tenir un autre langage.

J. D. G.

Pour appliquer à cette recherche notre formule (F_{24}), il faudra faire successivement, dans $y=\frac{1}{x}$,

$$x=1,\ x=1+\tfrac{1}{24},\ x=1+\tfrac{2}{24},\ x=1+\tfrac{3}{24}, \ldots\ldots x=1+\tfrac{23}{24},\ x=2\,;$$

ou bien

$$x=1\ ,\ x=\tfrac{25}{24}\ ,\ x=\tfrac{26}{24}\ ,\ x=\tfrac{27}{24}\ ,\ \ldots\ldots\ x=\tfrac{47}{24}\ ,\ x=2\ ;$$

ce qui donnera

$$y_0=1\ ,\ y_1=\tfrac{24}{25}\ ,\ y_2=\tfrac{24}{26}\ ,\ y_3=\tfrac{24}{27}, \ldots\ldots y_{23}=\tfrac{24}{47}\ ,\ y_{24}=\tfrac{1}{2}\,:$$

Il ne s'agira donc plus que de substituer ces valeurs dans la formule (F_{24}); et on opèrera d'une manière analogue, si l'on veut employer toute autre formule. Le tableau suivant présente les résultats obtenus pour S ou *Log*.2, par nos formules (F_6), (F_8), (F_{12}), (F_{24}), en regard desquels nous avons mis ceux de M. Kramp qui leur correspondent.

Logarithme de 2.

	Par notre méthode.	*Suivant M. Kramp.*
(F_6)	0,69314 80622	0,69314 80622
(F_8)	0,69314 72145	0,69314 72145
(F_{12})	0,69314 71806 261	0,69314 71807 262
(F_{24})	0,69314 71805 59945 310.	

La vraie valeur étant

0,69314 71805 59945 309;

il s'ensuit que le résultat de ma formule 12 est trop fort de 0,00000 00000 662, et celui de M. Kramp de 0,00000 00001 663; l'erreur de M. Kramp est donc presque triple de la mienne.

Je n'ai point rapporté les résultats qu'on obtient des cinq premières formules, parce que, par ma méthode, ces formules sont les mêmes que celles de M. Kramp. Il en est de même pour les formules (F_6) et (F_8); de sorte que les résultats des deux procédés ne commencent à différer les uns des autres qu'à partir de (F_{12}). Cette singularité semblerait assez difficile à expliquer autrement que par quelque erreur de calcul; mais le point essentiel est de savoir laquelle des deux formules doit être préférée; et l'expérience assure l'avantage à la nôtre.

Le même tableau fait encore voir que le résultat de ma formule (F_{24}) n'est en défaut que sur le 18.me chiffre; approximation qu'aucune autre méthode ne saurait donner aussi simplement, et qui excède de beaucoup les besoins ordinaires.

J'ai pris, pour 2.me application, la détermination de la longueur de l'arc de 45°, ou de $\frac{\pi}{4}$. La tangente de l'arc étant désignée par x, on sait que la question se réduit à intégrer $\frac{dx}{1+x^2}$, entre les limites $x=0$, $x=1$; ou encore à quarrer, entre les mêmes limites la courbe $y=\frac{1}{1+x^2}$. En faisant successivement

$$x=0\,,\ x=\tfrac{1}{24}\,,\ x=\tfrac{2}{24}\,,\ x=\tfrac{3}{24}\,,\ \ldots\ x=\tfrac{23}{24}\,,\ x=1\,,$$

on trouve

$$y_0=1\,,\ y_1=\tfrac{576}{577}\,,\ y_2=\tfrac{576}{580}\,,\ y_3=\tfrac{576}{585}\,,\ \ldots\ y_{23}=\tfrac{576}{1105}\,,\ y_{24}=\tfrac{1}{2}\,;$$

ces valeurs mises dans ma formule 24, on trouve

$$\pi=3.14159\ 26535\ 89790\,;$$

valeur qui n'est en défaut qu'au 16.me chiffre, tandis que M. Kramp n'a pu en trouver que 12. d'exacts, par une combinaison laborieuse de plusieurs de ses formules.

Dans ce 2.me exemple, nous n'avons trouvé que 15 chiffres exacts ; tandis que, dans le 1.er, nous en avions obtenu 17 et presque 18. La raison de cette différence est qu'ici la courbe $y=\frac{1}{1+x^2}$ à quarrer a une inflexion, au point dont les coordonnées sont $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{3}{4}$: cette circonstance donne lieu à une anomalie qui altère le résultat. Pour éviter cette source d'erreur, il aurait fallu quarrer séparément la courbe d'abord entre les limites $x=0$ et $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, et ensuite entre les limites $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $x=1$, et prendre la somme des résultats ; mais nous n'avions ici en vue que de comparer l'emploi de notre formule 24 avec le résultat obtenu par M. Kramp (*).

Ce géomètre, pour n'avoir point fait attention au point d'inflexion, a tiré de ses résultats des conséquences tout-à-fait fausses. En effet, sa formule n.° 8 lui a donné plus d'exactitude que ses formules n.° 9 et n.° 10 ; ce qui, au premier abord, présente un vrai paradoxe. Mais il faut remarquer que, par l'emploi de la formule n.° 8, il a pu s'opérer, entre les aires des deux branches de la courbe, une compensation d'erreurs qui a pu ne point avoir lieu d'une manière aussi avantageuse dans l'application des formules n.° 9 et n.° 10. Au reste, dans la courbe même $y=\frac{1}{x}$, qui n'a pas d'inflexion, les résultats successivement obtenus par les diverses

---

(*) On approcherait, au surplus, bien davantage de la valeur de π, en prenant pour x la tangente d'un très-petit arc, sous-multiple de 30°, et appliquant ensuite la formule (F_{24}).

(*Note de M. Bérard*).

formules ne semblent pas présenter un accroissement régulier d'approximation qui permette l'application de la méthode de M. d'Obenheim, comme M. Kramp l'avait espéré.

Je crois pouvoir conclure de tous les essais que j'ai fait, qu'au moyen de nos formules (F_6), (F_8), (F_{12}), (F_{24}), (F_{120}), on tire tout le parti possible d'un nombre donné d'ordonnées, et que l'emploi de ces formules offre le moyen; à la fois le plus exact et le plus expéditif d'intégrer les différentielles d'une seule variable. On peut, pour les diverses applications, consulter les mémoires cités, dont les formules s'appliquent à la manière des nôtres.

Les géomètres sentiront sans doute que cette manière de déterminer les coefficiens d'une formule, par des applications faites à des cas connus, dispense l'analiste d'une foule de raisonnemens, dont alors l'algèbre fait tous les frais. L'esprit de cette méthode peut avoir bien d'autres applications utiles.

Novembre 1816.

ARITHMÉTIQUE.

Théorie de la règle de trois ;

Par M. GERGONNE.



DÉFINITION *I.* J'appelle *effet* tout ce qui est ou peut être considéré comme produit, tout ce qui ne renferme pas uniquement en soi la raison de son existence.

Définition II. J'appelle *cause* tout ce qui produit ou concourt à produire un effet.

Ainsi, par exemple, une somme d'argent que je reçois d'un banquier est un effet, qui peut, à la fois, avoir pour causes un capital antérieurement placé entre ses mains, le temps qu'il y est demeuré, et l'intérêt dont je suis convenu avec lui.

Définition III Un effet est dit *simple* lorsqu'il résulte ou qu'il est considéré comme résultant d'une cause unique. Dans le cas contraire, l'effet est dit *composé*.

Il est bien peu d'effets dans la nature qui, à proprement parler, puissent être réputés simples ; mais on regarde souvent comme tels des effets composés dont une seule cause varie, tandis que toutes les autres sont supposées demeurer constamment les mêmes. Ainsi, par exemple, quoique la quantité d'argent qu'il faut donner pour obtenir un morceau de drap d'une certaine longueur ne dépende pas seulement de cette longueur ; mais encore de la largeur et de la qualité du drap, on considère néanmoins communément cette quantité d'argent comme dépendant uniquement de la longueur du

morceau de drap ; parce qu'on suppose tacitement que sa largeur et sa qualité demeurent invariables.

Définition IV. On dit qu'un effet est *en raison directe* de sa cause, ou de l'une de ses causes, lorsque, toutes choses égales d'ailleurs, la cause devenant un certain nombre de fois plus grande ou plus petite, l'effet devient précisément le même nombre de fois plus grand ou plus petit.

C'est dans ce sens, par exemple, que l'on dit que le prix qu'on donne d'une denrée est en raison directe de la quantité qu'on en achète.

Définition V. On dit qu'un effet est *en raison inverse* de sa cause, ou de l'une de ses causes, lorsque, toutes choses égales d'ailleurs, la cause devenant un certain nombre de fois plus grande ou plus petite, l'effet devient précisément le même nombre de fois plus petit ou plus grand.

C'est dans ce sens, par exemple, que l'on dit que le temps qu'un homme emploie à parcourir une route d'une longueur déterminée est en raison inverse de la vitesse avec laquelle il la parcourt.

PROBLÈME I. Une cause unique a *ayant produit un effet* e, *déterminer l'effet que produira une autre cause* a', *homogène avec* a ?

Solution. Soit e' l'effet cherché ; cet effet devant être homogène avec e, devra conséquemment être égal à e multiplié par un nombre abstrait (*), lequel ne pourra être qu'une fonction de a et a' ; et, comme on ne peut faire un nombre abstrait avec a et a' qu'en les divisant l'un par l'autre, nous pourrons écrire

$$e'=e.\mathrm{F}\left(\frac{a'}{a}\right).$$

Cela posé, il peut se présenter deux cas : e peut être en raison directe de a, ou bien il peut être en raison inverse de cette quantité.

(*) Je dis *multiplié*, et non pas *multiplié ou divisé*, parce que toute division peut être mise sous forme de multiplication.

1.er *Cas.* Si l'on suppose e en raison directe de a, il faudra (*Déf. IV*) qu'en supposant $a'=ma$, on ait aussi $e'=me$. La substitution de ces valeurs dans l'équation ci-dessus donnera, en simplifiant et renversant,

$$F(m)=m\ ;$$

et conséquemment, en changeant m en $\frac{a'}{a}$,

$$F\left(\frac{a'}{a}\right)=\frac{a'}{a}\ ;$$

donc

$$e'=e.\frac{a'}{a}\ .$$

2.me *Cas.* Si l'on suppose au contraire que e est en raison inverse de a; il faudra (*Déf. V*) qu'en supposant $a'=ma$ on ait $e'=\frac{e}{m}$. La substitution de ces valeurs dans notre équation donne, en simplifiant et renversant,

$$F(m)=\frac{1}{m}\ ;$$

ou, en changeant m en $\frac{a'}{a}$,

$$F\left(\frac{a'}{a}\right)=\frac{a}{a'}\ ;$$

donc

$$e'=e.\frac{a}{a'}\ .$$

PROBLÈME II. Un effet e, *produit par le concours de plusieurs causes, est en raison directe de quelques-unes* a, b, c, ... *de ces causes, et en raison inverse des autres* α, β, γ, ... *On suppose que d'autres causes* a', b', c', ..., α', β', γ', ... *respectivement homogènes aux premières, doivent concourir à la production d'un second effet, homogène à* e; *et l'on demande l'expression de ce nouvel effet?*

Solution. Soit e' l'effet cherché ; cet effet devant être homogène avec e, devra conséquement être égal à e multiplié par un nombre abstrait, lequel ne pourra être qu'une fonction des autres données a, b, c, ... α, β, γ, ... a', b', c', ... α', β', γ' du problème ; et, comme on ne peut faire des nombres abstraits avec ces données qu'en divisant, respectivement les unes par les autres, celles qui sont de même nature, on doit avoir

$$e'=e.\mathrm{F}\left(\frac{a'}{a},\ \frac{b'}{b},\ \frac{c'}{c},\ldots\ldots\ \frac{\alpha'}{\alpha},\ \frac{\beta'}{\beta},\ \frac{\gamma'}{\gamma},\ldots\ldots\right).$$

Or, si l'on supposait toutes les causes correspondantes, excepté a et a', égales de part et d'autre, on devrait avoir (*Probl. I*)

$$e'=e.\frac{a'}{a}\ ;$$

donc, dans le cas contraire, on doit avoir

$$e'=e.\frac{a'}{a}.\mathrm{F}\left(\frac{b'}{b},\ \frac{c'}{c},\ldots.\frac{\alpha'}{\alpha},\ \frac{\beta'}{\beta},\ \frac{\gamma'}{\gamma},\ldots.\right);$$

et, comme ce qu'on dit ici de a et a' peut se dire également de b et b', c et c', ...; on aura

$$e'=e.\frac{a'}{a}.\frac{b'}{b}.\frac{c'}{c}\ldots\mathrm{F}\left(\frac{\alpha'}{\alpha},\ \frac{\beta'}{\beta},\ \frac{\gamma'}{\gamma},\ldots.\right).$$

Présentement, si l'on suppose toutes les causes correspondantes, excepté α et α', égales de part et d'autre, on devra avoir (*Prob. I*)

$$e'=e.\frac{\alpha}{\alpha'}\ ;$$

donc, dans l'hypothèse contraire, on doit avoir

$$e'=e.\frac{a'}{a}.\frac{b'}{b}.\frac{c'}{c}\ldots\frac{\alpha}{\alpha'}.\mathrm{F}\left(\frac{\beta'}{\beta},\ \frac{\gamma'}{\gamma},\ldots\right);$$

et, comme ce qu'on dit ici de α et α' peut s'appliquer également à β et β', γ et γ', ... ; il s'ensuit qu'on a finalement

$$e'=e.\frac{a'}{a}.\frac{b'}{b}.\frac{c'}{c}\ldots\ldots\frac{\alpha}{\alpha'}.\frac{\beta}{\beta'}.\frac{\gamma}{\gamma'}\ldots\ldots$$

Remarque. Le problème que nous venons de nous proposer est connu vulgairement sous le nom de *Règle de trois composée*, et renferme, comme cas particulier, la *Règle de trois simple.* Dans ces sortes de questions, il n'y a jamais qu'une seule inconnue ; et les données, au nombre de trois au moins, sont toujours en nombre impair. Une seule de ces données est de même espèce que l'inconnue, et les autres données, toujours en nombre pair, sont deux à deux de même espèce. La manière de résoudre ces sortes de questions se trouve donc renfermée dans la règle pratique que voici :

L'inconnue est égale à la seule quantité connue de même espèce qu'elle, multipliée par une suite de fractions dont les termes respectifs sont les quantités connues de même espèce.

Il ne restera donc plus d'embarras que pour savoir, relativement à chaque fraction, quel terme doit être numérateur et quel terme doit être dénominateur ; c'est ce qu'on parviendra facilement à découvrir, au moyen de la seconde règle que voici :

Le numérateur de chacune des fractions par lesquelles on doit multiplier le nombre connu de même espèce que celui qu'on cherche, pour en conclure celui-ci, doit être plus grand ou plus petit que son dénominateur, suivant qu'en supposant égaux entre eux les deux termes de toutes les autres fractions, c'est-à-dire, en supposant la règle de trois simple le nombre cherché devrait être

plus grand ou plus petit que le nombre connu de même espèce que lui.

On peut, au surplus, dès les élémens d'arithmétique, parvenir à ces règles pratiques, par la discussion de quelques questions particulières; et c'est ainsi que j'en use depuis long-temps, en écartant absolument la théorie des proportions; théorie devenue aujourd'hui tout-à-fait superflue, et qui, il faut l'espérer, finira par ne plus appartenir uniquement qu'à l'histoire de la science.

En général, soit x l'inconnue d'un problème; et soient X, X', X'', ... les quantités connues de même espèce qu'elle, on devra nécessairement avoir

$$x=aX+a'X'+a''X''+.....$$

a, a', a'', ... étant des nombres abstraits fonctions des autres données de ce problème. Ces données doivent donc être de nature à se combiner entre elles de manière à former des nombres abstraits. Il serait important d'accoutumer les commençans à reconnaître cette loi générale de construction, dans toutes les formules algébriques.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Essai de solution du problème d'astronomie proposé à la page 388 du VI.e volume des Annales;

Par M. Benjamin Valz.



PROBLÈME. *Faire aux heures du lever et du coucher d'un astre, calculées pour un point quelconque de la surface de la terre, les corrections nécessaires pour les rendre propres à un autre point de cette surface, peu distant de celui-là?*

Solution. Soient

Z la distance zénitale d'un astre;

D sa déclinaison $\left\{\begin{array}{l}\text{boréale } +, \\ \text{australe } -;\end{array}\right.$

P la hauteur du pôle ou la latitude de $\left\{\begin{array}{l}\text{boréale } +; \\ \text{australe } -;\end{array}\right.$

H l'angle horaire $\left\{\begin{array}{l}\text{occidental } +, \\ \text{oriental } -.\end{array}\right.$

Dans le triangle sphérique formé par le pôle, le zénit et l'astre, on a, par les formules connues,

$$\text{Cos.}Z=\text{Sin.}D\text{Sin.}P+\text{Cos.}D\text{Cos.}P\text{Cos.}H\,; \qquad (1)$$

d'où on tire

$$\text{Cos.}H=-\text{Tang.}D\text{Tang.}P+\frac{\text{Cos.}Z}{\text{Cos.}D\text{Cos.}P}\,. \qquad (2)$$

Pour connaître le changement que la variation de P peut occasioner

dans la valeur de H, il faut différencier cette équation par rapport à ces quantités, considérées comme seules variables ; cela donne exactement

$$dH=\frac{dP}{\text{Sin.}H\text{Cos.}^2P}\left\{\text{Tang.}D-\frac{\text{Cos.}Z\text{Sin.}P}{\text{Cos.}D}\right\};$$

mais, comme nous ne nous proposons de faire usage de cette formule que pour l'époque des levers ou des couchers apparens, époque pour laquelle Z étant très-peu différent de 90°, Cos.Z doit très-peu différer de *zéro*, nous pouvons nous permettre de supprimer le second terme du binôme vis-à-vis du premier, et conséquemment d'écrire simplement

$$dH=\frac{dP\text{Tang.}D}{\text{Sin.}H\text{Cos.}^2P}. \qquad (3)$$

Nous verrons bientôt, en effet, que cette suppression est tout-à-fait sans inconvénient sensible.

Pour simplifier l'expression, et s'éviter en même temps la peine de chercher la déclinaison, on peut y substituer pour Tang.D sa valeur déduite de l'équation (1), en y supposant Cos.Z tout-à-fait nul ; c'est-à-dire,

$$\text{Tang.}D=-\frac{\text{Cos.}H}{\text{Tang}P}; \qquad (4)$$

il viendra ainsi

$$dH=-\frac{dP}{\text{Sin.}P\text{Cos.}P\text{Tang.}H}=-\frac{2dP}{\text{Sin.}2P\text{Tang.}H}. \qquad (5)$$

Telle est donc la correction qu'il faudrait appliquer aux levers et couchers de l'annuaire d'un lieu, pour les rendre propres à un autre lieu peu distant de celui-là. Mais, quelque simple qu'en soit le calcul, on pourrait trouver pénible d'être obligé de l'effectuer chaque fois ; il convient donc d'en dresser une table, ayant pour argument la déclinaison ; mais la précédente formule n'est plus aussi commode pour cet objet. Il paraît que ce qu'il y a de plus simple

simple est de se servir des deux triangles rectilatères, c'est-à-dire, de négliger le dernier terme de la formule (2). On a alors les deux équations

$$\text{Cos}.H=-\text{Tang}.D\text{Tang}.P\ ,\quad \text{Cos}.H'=-\text{Tang}.D\text{Tang}.P'\ ;\qquad (6)$$

desquelles on tire, par l'élimination de D,

$$\text{Cos}.H'=\text{Cos}.H.\frac{\text{Tang}.P'}{\text{Tang}.P}\ ;\qquad (7)$$

formule de laquelle il est facile ensuite de conclure la correction $H'-H$, avec assez de facilité. Quant à l'altération que pourrait y occasioner le terme négligé, nous l'obtiendrons en différentiant l'équation (1), par rapport à H et Z, considérées comme seules variables; il viendra ainsi

$$\text{d}H=\frac{\text{d}Z\text{Sin}.Z}{\text{Cos}.D\text{Cos}.P\text{Sin}.H}\ ;$$

ou plus simplement, parce que Z est fort approchant de $90°$;

$$\text{d}H=\frac{\text{d}Z}{\text{Cos}.D\text{Cos}.P\text{Sin}.H}\ .$$

On aura semblablement

$$\text{d}H'=\frac{\text{d}Z}{\text{Cos}.D\text{Cos}.P'\text{Sin}.H'}\ ;$$

et $\text{d}H'-\text{d}H$ sera l'erreur du résultat précédent.

Appliquons ces formules à l'horizon de Montpellier qui, par son éloignement de Paris, donne, pour la France, une des plus fortes réductions; et nous verrons que ce que nous nous sommes permis de négliger influe bien peu sur la correction trouvée

P, pour Paris. . . . $=48°.50'.14''$; Log.Tang. 0,05835

P', pour Montpellier $=43.36.16$; Log.Tang. 9,97883

$$\text{Log}.\frac{\text{Tang}.P'}{\text{Tang}.P}\ =\ 9,92048$$

$$\text{Cos.}H = -\text{Tang}D\,\text{Tang.}P\ ;$$

$$\text{Cos.}H' = \text{Cos.}H.\frac{\text{Tang.}P'}{\text{Tang.}P}\ ,$$

Tang.P. . . .	$=10{,}05835$		Tang.P.	$=10.05835$	
Tang.Décl.Sol.	$=9{,}63761$	$23°.28'$.	Tang.Décl.Lune	$=9.73927$	$28.°45'$
$-$Cos.H	$=9.69596$	$119°.46'$	$-$Cos.H	$=9.79762$	$128.°52$
$\frac{\text{Tang.}P'}{\text{Taug.}P}$	$=9.92048$		$\frac{\text{Tang.}P'}{\text{Tang.}P}$	$=9.92048$	
$-$Cos.H'	$=9.61644$	114.25	$-$Cos.H'	$=9.71810$	121.30
	$H'-H=$	$5.°21'$		$H'-H=$	$7.°22'$
	$\frac{1}{15}=$	$0^h.21^m,4$		$\frac{1}{15}=$	$0^h.29^m,5$

$$dH = \frac{dZ}{\text{Cos.}D\,\text{Cos.}P\,\text{Sin.}H}\ ,\quad dH' = \frac{dZ}{\text{Cos.}D\,\text{Cos.}P'\,\text{Sin.}H'}\ .$$

$dZ=(33')=1.51851$	1.51851	$dz=-24'=1.38021$	$1{,}38021$
C. Cos.D=0.03749	0.03749	C. Cos.D =0.05714	0.05714
C. Cos.P=0.18158	C. Cos.P=0.14019	C. Cos.P =0.18158	C. Cos.P'=0.14019
C. Sin.H=0.06145	C. Sin.H'=0.04069	C. Sin.H =0.10868	C. Sin.H'=0.06923
$dH=62',95=1{,}79903$	$dH'=54',56=1.73688$	$dH=-53',41=1{,}72761$	$dH'=-44',33=1{,}64677$

$dH'-dH=-0°.8',40$ $\qquad\qquad$ $dH'-dH=+0°.9',08$

$\frac{1}{15}=-0^h.0^m,56$. $\qquad\qquad$ $\frac{1}{15}=+0^h.0^m,61$.

Pour le soleil, dZ est positif, et égal à la réfraction horizontale (33′) ; mais pour la lune ce terme devient négatif et égal à (24′), différence entre la réfraction et la parallaxe horizontale moyenne (57′). Nous avons choisi les plus grandes déclinaisons du soleil et de la lune, parce que les corrections sont alors les plus fortes ; et l'on voit que, même dans ce cas extrême, le terme négligé altère à peine les résultats d'une demi-minute de temps. Les annonces n'étant qu'à

la minute, on peut se permettre cette négligence, ce qui abrègera considérablement les calculs. Il conviendrait cependant de tenir compte du terme négligé, si la déclinaison passait 30°. La formule pourrait même n'être plus suffisante, si la déclinaison approchait d'être égale au complément de la hauteur du pôle; il faudrait, dans ce cas, recourir aux différences finies, si cela en valait la peine; mais le calcul direct paraît alors plus court.

Il ne nous reste plus qu'à tenir compte du changement des parallaxes, et de celui en déclinaison et en ascension droite qui peuvent avoir lieu entre les deux couchers ou les deux levers. Il est aisé de s'assurer que les deux premiers donnent une différence absolument insensible. Le changement en déclinaison, même pour la lune, influerait à peine de 0',05 de temps, et est par conséquent tout-à-fait négligeable. Examinons celui de l'ascension droite. Soient L l'heure du coucher de la lune, dans l'annuaire, c la correction à y appliquer, et d la différence des méridiens terrestres $\left\{\begin{matrix}\text{orientale } +\\ \text{occidentale } -\end{matrix}\right\}$; on aura

$$L-\quad[(\text{Asc.dr.lune}-\text{Asc.dr.Sol.})\text{ à l'époque } L]=H\,,$$
$$L+c-[(\text{Asc.dr.lune}-\text{Asc.dr.Sol.})\text{ à l'époque } (L+c-d)]=H'\,,$$
$$c=H'-H+\text{d}(\text{Asc.dr.lune}-\text{Asc.dr.Sol.})(c-d)\,.$$

Ce qu'on pourrait faire de mieux, pour réduire ces formules en tables, serait d'employer le mouvement moyen de la lune rapporté à l'écliptique, en considérant ce cercle comme le plan moyen des mouvemens de cet astre, par rapport à l'équateur; et de faire ensuite la réduction à ce dernier cercle. Pour l'effectuer, le triangle sphérique rectangle donne, en faisant $\iota=$ obliquité de l'écliptique et $l=$ longitude, les deux équations

$$\text{Tang.(Asc.dr.)}=\text{Cos.}\iota\text{Tang.}l\,,\quad \text{Cos.}l=\text{Cos.(Asc.dr.)Cos.}D\,.$$

Différentiant la première et substituant ensuite la valeur de Cos.(Asc.dr.) prise dans la seconde, on aura

$$\text{d.(Asc.dr.)}=\frac{\text{d}l.\text{Cos.}\iota\text{Cos.}^2\text{(Asc.dr.)}}{\text{Cos.}^2 l}=\frac{\text{d}l.\text{Cos.}\iota}{\text{Cos.}^2 D}\,.$$

Mais, comme la plus grance réduction altère à peine de $\frac{1}{11}$ les moyens mouvemens, on peut la négliger, et compter simplement ces derniers sur l'équateur. Nous aurons alors

Moyen mouvement diurne $\begin{cases} \text{de la lune} = 13^\circ,176 \\ \text{du soleil} \quad = 0\ ,986 \end{cases}$

Différence ou mouvement relatif de la lune $12^\circ.190$

Ce qui fait en une minute de temps $0',508$

$$\text{Donc} \quad e = dH + 0',508\frac{c-d}{15}\ .$$

On voit aisément que les corrections ne seront pas les mêmes pour les déclinaisons australes et pour les déclinaisons boréales. A la vérité, la plus grande différence ne va qu'à *deux minutes* de temps.

Lorsqu'à l'aide de ces formules on aura formé la table des corrections, ayant pour argument la déclinaison, il sera commode de se servir de celle-là pour en dresser une inverse, ayant pour argument la correction même, à $0',5$; $1',5$; $2',5$; $3',5$;....; afin d'avoir la limite de la déclinaison en dessous ou en dessus de laquelle la correction devra être augmentée ou diminuée d'une unité.

Nismes, le 31 octobre 1816.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Géométrie.

Démontrer que, quelles que soient la nature et la situation respective de deux sections coniques, tracées sur un même plan, il est toujours permis de considérer leur système comme la perspective du système de deux cercles tracés sur un autre plan. Déterminer, en outre, toutes les diverses situations de l'œil qui donnent en effet le système de deux cercles pour perspective de ces deux courbes ?

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Description d'un projet de machine à vapeur, *principalement applicable à faire mouvoir les bateaux;*

Par M. A. R. Bouvier, ingénieur des ponts et chaussées, ancien élève de l'école polytechnique.

Dans le dessin joint à la présente description, le rapport entre les différentes pièces n'a point été étudié ; on ne doit le regarder que comme une simple figure de géometrie, servant à l'explication de l'idée. Dans la vue de le simplifier, on a supprimé la chaudière, ainsi que le bateau.

Dans ce genre de machines, on a pour but d'imprimer un mouvement de rotation à un axe horizontal qui traverse le bateau. Ce mouvement en communique un semblable, mais plus rapide, au moyen d'engrenages à deux roues à aubes qui poussent l'eau et font l'office de rames.

aaaa (fig. 1), est la projection horizontale de cet axe ; $a''a''a''$ (fig. 3), sa projection verticale, $a'''a'''a'''a'''$, (fig. 4) sa projection latérale.

Pour imprimer un mouvement de rotation à cet axe, j'imagine un tambour ou portion de cylindre horizontal, ayant le même centre que l'axe qu'il s'agit de faire tourner ; *bbbb* est la projection horizontale de ce tambour ; $b''b''b''$ sa projection verticale ; et $b'''b'''b'''b'''$ sa projection latérale.

La coupe de ce tambour, plus en grand, est indiquée en $b'b'b'$ (fig. 2); $c'c'c'$ est la coupe de son axe; et $a'a'a'$ la projection de la partie extérieure au tambour, qui a un moindre diamètre que l'intérieure. $d'd'd'$ est le tuyau qui communique à la chaudière, et par où arrive la vapeur dans le tambour. $e'e'e'$ est une plaque qui va d'une des faces latérales du tambour à l'autre; elle porte sur une feuillure pratiquée sur les côtés verticaux du tambour, et touche l'axe $c'c'c'$; elle a un axe de rotation, marqué au point e', sur la partie courbe du tambour. On voit en $f''f''$ (fig. 3) la projection verticale de la saillie établie sur les côtés du tambour, pour y pratiquer les feuillures. ff, ff (fig. 1) sont les projections horizontales des mêmes saillies, et $f'''f'''f'''f'''$ (fig. 4) leurs projections latérales. Une autre plaque, qui va aussi d'une des faces latérales du tambour à l'autre, et qui fait corps avec l'axe $c'c'c'$ (fig. 2) est représentée par $g'g'$. Cette plaque touche la partie concave du tambour, ainsi que ses parties latérales.

En supposant que la vapeur arrive dans le tambour par le tuyau $d'd'd'$, elle entrera dans l'espace $e'c'c'g'g'$. La plaque $e'e'e'$ s'opposera à ce qu'elle s'échappe de ce côté; l'action de la vapeur sur cette plaque, la pressant plus fortement contre la feuillure, contribuera à la mieux maintenir. La plaque $g'g'$ sera également pressée par la vapeur; mais, comme elle fait corps avec l'axe $c'c'c'$, et que rien d'ailleurs ne s'oppose à son mouvement de rotation, il s'ensuit que ce mouvement aura lieu et que $g'g'$ viendra se placer successivement en $h'h'$, $k'k'$; mais, par un mécanisme particulier, la soupape $l'l'$ se fermera, dès que la plaque $g'g'$ sera en $h'h'$, et restera dans cet état, jusqu'à ce que cette plaque soit parvenue de nouveau, en continuant son mouvement, à sa position primitive $g'g'$.

Un second tambour, semblable au premier, est assemblé sur le même axe qu'il s'agit de faire tourner, et est projeté horizontalement en $mmmm$ (fig. 1). Celle des deux plaques de ce tambour qui fait corps avec le cylindre intérieur est en $h'h'$, quand celle de l'autre

est en $g'g'$, et réciproquement. La soupape qui intercepte ou permet la communication de la chaudière avec le 2.me tambour s'ouvre ou se ferme quand celle du premier se ferme ou s'ouvre ; de sorte que, lorsque la force de la vapeur commence à agir avec moins d'intensité sur l'une des plaques faisant corps avec l'axe, par la suppression de la communication avec la chaudière, elle opère au contraire avec toute son intensité sur l'autre.

La plaque $g'g'$ du 1.er tambour étant parvenue en $k'k'$, les deux triangles projetés en nn, nn, dans leur première position, et en $g'n'g'$ dans la coupe, seront en $k'n'k'$, et toucheront la plaque $e'e'e'$. La force expansive de la vapeur, qui agit sur $e'e'$, annulle celle qui agit sur $k'k'$; mais, à cause du mouvement déjà imprimé et de la force due à la densité entière de la vapeur, qui agit sur la plaque de l'autre tambour, le mouvement de rotation de l'axe continuera d'avoir lieu; et la plaque $e'e'$, tournant autour de son axe de rotation e' laissera passer l'autre plaque, fixée à l'axe de rotation. Dès qu'elle l'aura dépassée, la plaque $e'e'$, par l'effet seul de son poids, retombera sur la feuillure, et viendra toucher de nouveau l'axe $c'c'c'$. La plaque faisant corps avec ce même axe $c'e'c'$, arrivée en la position $g'g'$, la soupape $l'l'$ se rouvrira, et prendra la position indiquée en la figure 2. Dans le même temps, la soupape correspondant à la communication de l'autre tambour avec la chaudière se fermera.

Il faut remarquer que le tuyau $p'p'$ qui communique du tambour au condenseur est constamment ouvert ; de sorte que la vapeur peut s'y rendre, dès que la plaque $e'e'$ commence à s'ouvrir, et que celle contenue entre les plaques $g'g'$ et $e'e'$, en passant par la direction où se fait le mouvement, peut y affluer, dans quelque position que se trouve $g'g'$; d'où il suit qu'elle ne peut s'opposer au mouvement.

La vapeur qui se rend dans le condenseur, lorsqu'elle commence à y affluer, n'a plus la même densité que celle de la chaudière, ni par conséquent le même degré de force élastique; puisque, d'après

la loi établie par Mariotte pour les gaz, et qui s'applique également aux vapeurs, du moins tant qu'elles ne changent pas d'état, leur force élastique est proportionnelle à leur densité. Ainsi, la force de pression qui aura lieu sur la plaque $g'g'$, parvenue en $k'k'$ sera à celle qui agissait lorsque cette plaque était en $h'h'$, comme $e'g'b'b'h'h'c'g'e'e'$ est à $e'b'b'b'k'k'c'h'c'g'e'e'$, parce que, depuis $h'h'$ jusqu'à $k'k'$, il n'y a pas eu de nouvelle vapeur reçue de la chaudière. Cette vapeur qui agit par sa seule élasticité, et sans nouvelle communication avec la chaudière va, d'après la loi ci-dessus établie, toujours en diminuant d'intensité, depuis $h'h'$ jusqu'à $k'k'$; cependant, arrivée à ce dernier point, elle est encore plus de moitié de ce qu'elle était; puisque l'espace dans lequel elle est contenue n'est pas le double de celui qu'elle occupait primitivement, lorsqu'elle était en communication avec la chaudière.

Cette force qu'on acquiert dans mon mécanisme, par la seule expansion de la vapeur et sans en consommer, est un surcroît de force qu'on a sur la machine à vapeur employée jusqu'à présent, où la vapeur condensée a la même densité que celle de la chaudière. Cet avantage que présente mon idée me paraît de la plus haute importance; on peut, en employant un plus grand nombre de tambours, en tirer un parti plus avantageux. En en mettant quatre, par exemple, et en supposant que chaque tambour n'a de communication avec la chaudière que pendant un quart de tour de l'axe; en supposant encore que depuis k' jusqu'en g', ce qui est le seul espace où la vapeur n'agit pas, il y a un espace égal à un quart de cercle, on trouve que la force provenant de la seule dilatation est à peu près égale à celle qui agit dans le tambour en communication avec la chaudière (Voyez ci-après la démonstration que j'en donne). Ainsi, par cette disposition, on double la force des machines à vapeur ordinaires. En mettant un plus grand nombre de tambours on augmenterait encore la force. Il y a cependant ici un nombre qu'il serait inutile de dépasser. Je donnerai ci-après quelques considérations qui peuvent aider à le déterminer.

Ce que je viens d'exposer fait déjà concevoir la plus grande partie de mon mécanisme. Je vais expliquer maintenant la manière dont je fais ouvrir et fermer la soupape $l'l'$.

Cette soupape a un axe de rotation qui fait corps avec la plaque $l'l'$; une autre plaque, perpendiculaire à la première, est assemblée sur le même axe, extérieurement au tuyau; la plaque intérieure est projetée en AAAA (fig. 5), et celle extérieure en BBBB.

Une demi-portion de cylindre, projetée en CCC, (fig. 6) est assemblée solidement sur l'axe de rotation des tambours, au moyen de rayons qui n'en occupent pas toute la largeur. La projection horizontale de ce cylindre est DDDD (fig. 8), et celle des rayons est DFFF et FFFF. On voit (fig. 7) la coupe d'un rayon et du cylindre.

Le cylindre tient la plaque GG, extérieure au tuyau, verticalement; comme on le voit (fig. 6); et, par suite, la plaque intérieure GH horizontalement. Il est aisé de comprendre que les choses resteront dans cet état, jusqu'au moment où le demi-cylindre aura passé le point G; alors la soupape se fermera par son propre poids.

On sent qu'en ayant un autre demi-cylindre qui, en projection verticale, finisse, avec celui CCC le cercle entier, le dernier point du premier demi-cylindre ne laissera échapper la soupape que lorsque le premier point de l'autre aura ouvert la sienne en entier, ce qui établira le mouvement alternatif entre les deux soupapes. On voit en $qqqq$, $qqqq$, les projections horizontales des deux demi-cylindre; $q''q''q''q''$ les projections verticales et $q'''q'''q'''q'''$, $q'''q'''q'''q'''$, les projections latérales.

Pour élever l'eau froide nécessaire à la condensation de la vapeur, on pourra adapter quelques godets à la roue à aubes qui plonge dans l'eau, dans le cas du moins où cette roue ne devrait pas avoir une grande vitesse, et où, par conséquent, les godets pourraient se vider. S'il en était autrement, c'est-à-dire, si la roue devait avoir une grande vitesse de rotation; en recueillant l'eau qu'elle

lancerait, on en aurait suffisamment. Ces moyens seront beaucoup plus simple que de mettre en mouvement une pompe pour cet effet.

Il en faudra nécessairement une pour évacuer l'eau condensée. On emploie d'ailleurs cette eau à alimenter la chaudière. Cette pompe est mise en mouvement, dans ma machine, par un cylindre arrêté sur l'axe de rotation, et coupé par une hélice qui ne s'éloigne de la base du cylindre que sur la moitié du cercle, et qui s'en rapproche sur l'autre. On sent que, la manivelle de la pompe, étant accrochée par ce cylindre, fera mouvoir le piston de toute la différence qu'il y a entre l'ordonnée la plus longue de l'hélice et la plus courte, en les rapportant au cercle de la base. La demi-portion qui s'éloigne du cercle étant passée, la pression de l'air sur le piston fera suivre à la manivelle l'hélice qui se rapproche de la base du cylindre ; ainsi cette pompe aura un mouvement de va et vient. On voit (fig. 9) la portion développée de ce cylindre, en r sa projection horizontale, en $r''r''r''$ sa projection verticale, et en r''' sa projection latérale. La manivelle du piston se voit aussi au-dessous de r''', qui est sa projection latérale.

Le vase s est le condenseur. t est le vase où l'on retient l'eau froide pour la condensation. u est le syphon qui porte l'eau dans le condenseur.

Ce que je viens de dire fera, je l'espère, suffisamment comprendre mon idée. Je vais présentement appliquer le calcul à la détermination de la force provenant de l'expansion de la vapeur, ou, ce qui revient au même, l'augmentation de force due à la disposition particulière de mon mécanisme.

J'appelle a la portion de la circonférence correspondant à la portion du cercle pendant laquelle un tambour reçoit la vapeur de la chaudière. a est une portion aliquote de la circonférence, et qui y est comprise autant de fois qu'il y a de tambours. Les plaques fixées à l'axe qu'on fait tourner, projetées sur le cercle d'un des tambours, au moment où un nouveau tambour reçoit la vapeur, intercepte-

ront sur la circonférence les portions a, a', a'', ... $a^{(n-1)}$, (fig. 10), égales à a. Celle qui recevra la vapeur de la chaudière aura sa plaque projetée dans la portion a; celle qui la recevra immédiatement avant l'aura dans a', l'autre dans a'', et ainsi de suite. La même combinaison aura lieu, quelle que soit la plaque du tambour qui décrit a. La détermination de la force moyenne, pendant cette portion de rotation, sera celle de la machine entière, puisque cette force est périodique, et que a détermine la période. En appelant b l'arc du même cercle qui soutiendrait un secteur égal à l'espace EEG (fig. 10), et x la portion de la même circonférence, à partir de a, pour arriver à une plaque sise dans une position quelconque; f étant la force qui agissait sur cette plaque, lorsqu'elle était en communication avec la chaudière; f' celle qui a lieu dans la position correspondante à x; on aura

$$f:f'::a+b+x:a+b;$$

d'où

$$f'=f\cdot\frac{a+b}{a+b+x}:$$

Il reste dans le condenseur une vapeur dont la température et par suite la force élastique varie peu; en la désignant par k, la force qui produit l'effet utile sur une plaque sera

$$f\cdot\frac{a+b}{a+b+x}-k;$$

d'où $(f'-k)\mathrm{d}x$, expression différentielle de la force variable, sera $\frac{f(a+b)\mathrm{d}x}{a+b+x}-k\mathrm{d}x$, dont l'intégrale est $f(a+b)\mathrm{Log}(a+b+x)-kx+o$. En prenant cette intégrale depuis $x=o$ jusqu'à $x=a$, et en divisant par a, on aura la force moyenne due au tambour qui décrit a'. Cette même intégrale, prise depuis $x=a$ jusqu'à $x=2a$, et divisée encore par a, sera celle due au tambour qui décrit a'', et ainsi

de suite. La somme de toutes ces intégrales, divisée par la quantité a sera donc la force moyenne due à tous les tambours qui n'ont plus de communication avec la chaudière, c'est-à-dire, celle provenant de l'expansion de la vapeur. Il ne faudra pas comprendre, dans cette somme d'intégrales, la dernière qui est celle répondant au tambour qui décrit $a^{(n-1)}$, attendu que la vapeur s'échappe alors pour aller au condenseur. Or, la somme de toutes ces integrales est égale à une seule, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=(n-2)a$. En substituant ces quantités dans l'intégrale prise entre ces limites, on a

$$f.\frac{a+b}{a}\text{Log}.\frac{a+b+(n-2)a}{a+b}-(n-2)k\ :$$

Si l'on fait abstraction de b, cette expression se simplifie et devient seulement

$$f.\text{Log}.(n-1)-(n-2)k\ .$$

En faisant, dans ces formules $f=32$ et $k=4$, ce qui est à peu près le rapport de ces forces, dans les machines ordinaires; et si l'on suppose de plus $n=4$; on aura 32Log.3—8=32(1, 10)—8=27,20. Or, l'effet utile de la plaque en communication avec la chaudière est 32—4=28. On voit, d'après cela, que la force due à l'expansion ne serait pas tout-à-fait égale à celle du tambour qui reçoit la vapeur; de sorte que la force ne serait pas doublée, mais peu s'en faudrait.

Si l'on employait une machine à haute pression, la réaction de la vapeur qui est dans le condenseur serait peu de chose relativement à celle qui produirait l'effet utile. Si, par exemple, la pression directe était de quatre atmosphères, on aurait alors $f=112$; et k serait encore sensiblement égal à 4; en supposant $n=4$, on aurait, pour la force due à l'expansion, 112.1,10—8=115,20. On voit que cette force serait plus considérable que celle due à la plaque en communication avec la chaudière, laquelle ne serait que

112

112—4=108 ; ainsi la force serait plus que doublée. Cela prouve que mon idée serait encore plus avantageuse pour les machines à haute pression que pour les autres.

J'ai supposé que la réaction était 4, dans la machine à haute pression, comme dans celle à simple pression ; on sent cependant qu'elle doit être moins forte dans ces dernières que dans les autres, puisque la vapeur qui afflue dans le condenseur a beaucoup moins de densité, et que par conséquent elle doit être d'une condensation bien plus prompte ; ainsi, pour cette raison, 4 serait peut-être trop dans les uns et pas assez dans les autres.

Le coefficient différentiel de l'intégrale indéfinie $f(a+b)\mathrm{Log.}(a+b+x)$ $-kx+c$, égalé à zéro, donnera les *maxima* et les *minima* dont cette expression est susceptible. Or, ce coefficient différentiel est $\frac{f(a+b)}{a+b+x}-k=0$; d'où $x=\frac{(a+b)(f-k)}{k}$.

Le coefficient du second ordre étant négatif prouve que cette expression est un *maximum*. En se rappelant que l'expression différentielle que nous avons égalée à zéro n'est autre chose que la force qui agit directement moins celle qui réagit du condenseur ; on voit que le *maximum* a lieu quand ces deux forces sont égales.

Pour simplifier la valeur de x, négligeons b; elle se réduira à $x=\frac{a(f-k)}{k}$. Nous avons trouvé, d'après la disposition du mécanisme précédemment décrit, que la plus grande valeur de x, dans l'intégrale, était $(n-2)a$. Ainsi, en mettant cette expression à la place de x, on aura l'équation $(n-2)a=\frac{a(f-k)}{k}$, d'où $n=\frac{f+k}{k}$. Si, d'après les valeurs de f et k, on trouvait pour n un nombre entier ; alors, en employant ce nombre de tambours, on aurait le *maximum* de la force due à l'élasticité. Si, au contraire, l'on n'obtenait qu'un nombre fractionnaire, en prenant pour le nombre de tambours la valeur entière qui en approcherait le plus, on aurait un résultat qui

différerait peu du *maximum* : il serait, du reste, le plus grand qu'on pût obtenir par mon mécanisme.

Si, dans l'expression $n=\frac{f+k}{k}$, on met pour f et k leurs valeurs, dans le cas des machines ordinaires, on a $n=\frac{32+4}{4}=9$. Ce nombre de tambours serait trop grand pour qu'on pût l'employer avec avantage; la complication de la machine, la dépense que cela occasionerait, feraient sans doute plus que compenser l'avantage qui résulterait de l'augmentation de la force.

Si l'on fait $f=112$ et $k=4$, on trouve $n=\frac{112+4}{4}=29$, résultat encore moins applicable que le précédent.

Si, dans la formule $f\text{Log.}(n-1)-k(n-2$, on fait $f=32$, $k=4$, $n=9$, on aura $32\text{Log.}8-4.7=32.2{,}07-28=38{,}24$, expression du maximum de la force qu'on peut obtenir, par la dilatation de la vapeur, dans le cas des machines ordinaires; laquelle force ne diffère de celle obtenue pour quatre tambours que de 11,04. Ainsi, l'augmentation de cinq tambours n'aurait augmenté la force que de cette quantité; tandis que les quatre premiers donnent 27,20. On voit donc que, passé un certain nombre de tambours, leur accroissement ne produit pas un effet beaucoup plus grand.

Pour simplifier les calculs, j'ai supposé qu'un seul tambour ne produisait aucun effet; cependant, si l'on en augmentait trop le nombre, cela ne pourrait avoir lieu, attendu qu'il pourrait y avoir plusieurs tambours dont la vapeur se rendrait en même temps au condenseur, et qui, par suite, n'ajouterait rien à la force. Mais, je le répète, je ne pense pas qu'il soit avantageux de les trop multiplier; quatre me paraissent suffisans; et j'ai fait voir précédemment que par là on doublerait à peu près l'action des machines.

Aux avantages de mon idée, que j'ai déjà développés, je crois pouvoir ajouter celui d'avoir directement un mouvement de rotation continu, et d'éviter par là la force qu'on perd par les frottemens,

pour l'obtenir de la transformation d'un mouvement de *va et vient.* (*)

On évite aussi, par mon système, les chocs qu'on a dans les machines ordinaires, pour annuler la force vive acquise dans un sens, afin d'en prendre une en sens contraire; chocs qui ébranlent singulièrement les machines et leurs supports, et concourent puissamment à leur destruction.

(*) M. Ferry, l'un des principaux agens de la compagnie Andriel et Pajol, qui a bien voulu m'honorer de ses conseils, a communiqué mon idée à M. Molard, membre de l'académie des sciences, administrateur du conservatoire des arts et métiers, qui lui a observé que je n'étais pas le premier qui eût proposé une machine à vapeur où l'on obtenait directement le mouvement de rotation. J'ai trouvé, depuis, la description d'une semblable machine, dans l'ouvrage de MM. Lantz et Bétancourt; mais celle-ci, ou une autre de même espèce, que M. Ferry m'a fait connaître, et qui a été proposée par M. Raynalt, ne sont point disposées de manière à tirer parti de la force provenant de la dilatation de la vapeur; et c'est en cela que mon idée me paraît offrir une grande utilité.

GNOMONIQUE.

Construction nouvelle d'un cadran solaire quelconque;

Par un ABONNÉ.

Au Rédacteur des Annales ;

MONSIEUR ,

JE viens de lire la *Gnomonique graphique* de M. MOLLET, professeur à Lyon ; et sa lecture m'a autorisé à croire que c'est à l'auteur que l'on doit la construction du cadran cylindrique que l'on trouve à la page 372 du 3.ᵉ volume des *Annales*. Ce problème n'est pas nouveau , non plus que celui du cadran sphérique , comme je l'avais d'abord pensé ; on les trouve traités , l'un et l'autre, dans les *Récréations mathématiques* d'OZANAM , où l'on rencontre une colonne cylindrique surmontée d'une sphère , qui est relative à ces deux problèmes.

En examinant les problèmes de gnomonique plane de M. Mollet, j'ai remarqué que sa méthode de construction des lignes horaires n'est commodement applicable, dans la pratique, que pour trouver, dans le cadran horizontal, par exemple, les lignes de 8 heures du matin à 4 heures du soir, celles de 7 heures du matin et de 5 heures du soir font des angles trop aigus avec l'équinoxiale pour pouvoir être déterminées d'une manière exacte ; celles de 4

heures et 8 heures font même déjà avec l'équinoxiale des angles au-dessous de 45°, ce qui exige beaucoup d'espace.

Pour remédier à cet inconvénient, je propose la construction suivante, que j'appliquerai, pour plus de généralité, à un cadran incliné et déclinant.

Soient C (fig. 11) le centre du cadran, CB l'axe, CM la soustylaire, BM la perpendiculaire à l'extrémité de l'axe, C12 la méridienne.

La latitude du lieu, la longueur de l'axe, l'inclinaison et la déclinaison du plan étant données, les trois côtés du triangle rectangle CBM et l'angle MC12 sont aussi données. Cela posé :

Je construis un rectangle AGHF, ayant pour hauteur la soustylaire CM et pour base GH, double de la perpendiculaire BM; cette base, partagée en deux parties égales par la soustylaire, coupe la méridienne au point 12.

Je prolonge CA d'une quantité AP=AG, longueur de la soustylaire; je tire PG, qui fait ainsi avec AP un angle de 45°. Sur PA prolongée je porte PG de P en G'; sur PA et PG je porte GM de P en Q et Q'. Du point P comme centre, avec le rayon PA, je décris l'arc de 45° AA'; je tire la ligne A'G'; et, par les points Q et Q', je mène les droites QR, Q'R', respectivement parallèles aux lignes AG, A'G'.

Je porte M12 de Q' en 12 sur Q'R'; et, par les points P et 12, je mène le rayon P6. A compter du point où ce rayon rencontre l'arc AA', je prends sur cet arc, de part et d'autre de ce point, des divisions de 15° (On les prendrait de 7°.30' ou de 3°.45', si l'on voulait marquer sur le cadran les demi-heures ou les quarts-d'heures). Par les points de division, je mène les rayons P5, P6, P7; le rayon P5 rencontre respectivement les lignes QR, Q'R', AG, A'G' aux points 2, 11, 8, 5; le rayon P6 rencontre les mêmes lignes aux points 3, 12, 9, 6; et le rayon P7 les rencontre aux points 1, 4, 10, 7.

Je porte QR, avec ses divisions 2, 3, 4, de M en H; je porte Q'R', avec ses divisions 1, 12, 11, de M en G; je porte enfin A'G', avec ses divisions 7, 6, 5, de F en H, et je laisse en place la ligne AG, avec ses divisions 8, 9, 10; menant enfin des droites du point C aux points de division 8, 9, 10, 11, 12, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 des trois côtés AG, GH, HF du rectangle, le cadran se trouve construit.

Si la méridienne, avant de rencontrer l'équinoxiale GH, rencontrait d'abord la parallèle AG à la soustylaire, ainsi qu'il arrive dans la figure à la ligne C10; ce serait à son point de rencontre avec cette droite AG qu'il faudrait marquer 12, en faisant rétrograder en conséquence tout le reste du numérotage.

L'on voit, par cette construction, dont je ne donne point la démonstration, parce qu'elle est facile à trouver, que toutes le lignes horaires sont déterminées par des intersections de droites qui ne forment jamais entre elles des angles inferieurs à 45°.

Agréez, etc.

Marseille, le 1.er juin 1816.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Considérations préliminaires ;

Par M. Gergonne.

Il y a à peu près un an qu'un géomètre très-distingué, auteur d'ouvrages estimés, et attaché, comme professeur, à l'une de nos principales écoles, m'annonça qu'il avait conçu sérieusement des doutes sur la légitimité des procédés du calcul des variations et des résultats qui s'en déduisent ; qu'il avait à opposer à ces procédés des objections d'une nature très-grave, et qu'il était, entre autres choses, en état de prouver que la surface que cette branche d'analise indique comme celle de moindre étendue entre des limites données, ne jouit point constamment de cette propriété.

Toujours empressé de donner accès dans les *Annales* à toutes les discussions et recherches qui peuvent tendre à jeter plus de lumière sur les doctrines fondamentales, je me hâtai d'écrire à cet estimable géomètre, pour l'engager à faire, des doutes qu'il avait conçus, le sujet d'un mémoire que je lui promettais d'insérer dans ce recueil, aussitôt qu'il me serait parvenu.

Mais, soit que le géomètre qui avait ainsi éveillé ma curiosité ait été détourné, par l'enseignement dont il est chargé, du soin de condescendre à ma prière ; soit que, comme il arrive assez souvent, le champ s'étant agrandi devant lui, à mesure qu'il le parcourait, il n'ait pu encore en atteindre la limite ; soit peut-être aussi que des réflexions nouvelles aient dissipé tout-à-fait les nuages qui s'étaient

élevés dans son esprit ; je suis encore à attendre aujourd'hui le mémoire qui m'était presque promis.

Dans l'attente où j'étais de ce mémoire, je pensai convenable de proposer, dans diverses livraisons des *Annales*, des questions bien circonscrites, relatives à la recherche de la moindre surface entre des limites données. J'étais d'autant plus fondé à le faire que, si ceux qui ont écrit sur le calcul des variations ont donné l'équation de la surface *minimum*, ainsi que son intégrale générale ; aucun d'eux, du moins que je sache, n'a montré, par des exemples, comment on doit déterminer les fonctions arbitraires qui naissent de son intégration, et combien de conditions sont nécessaires pour déterminer la forme de ces fonctions. Je pensai d'ailleurs que, si effectivement il existait quelque surface moins étendue que celle qu'on donne pour *minimum*, quelqu'un saurait peut-être la trouver ; et que sa quadrature, comparée à celle de l'autre, serait le moyen le plus propre de tous pour renverser les doctrines reçues, ou pour montrer l'impuissance des efforts dirigés contre elles.

C'est faire comprendre assez que j'avais un moment partagé, de très-bonne foi, les scrupules qu'on avait cherché à m'inspirer ; des réflexions ultérieures les ont fait entièrement évanouir ; mais j'ai pensé qu'il n'en serait pas moins utile, avant de présenter la solution qu'a donné M. Tédenat de l'une des questions relatives aux surfaces *minimum*, d'entrer dans quelques détails sur ce sujet.

Le problème de la moindre surface entre des limites données est évidemment identique avec celui où l'on demanderait quelle courbure doit affecter une toile parfaitement flexible et élastique, tendue par ses extrémités, sur des lignes fixes données, planes ou courbes, à simple ou à double courbure ; et l'on voit par là que ce problème peut être considéré comme n'appartenant pas moins à la mécanique qu'à la géométrie. Mais, quel que soit d'ailleurs celui de ces deux points de vue sous lequel on l'envisage, on voit également que la surface cherchée doit être telle que, si l'on en circonscrit une

portion

portion quelconque, par une ou plusieurs lignes droites ou courbes, formant une figure fermée, l'aire de la portion de surface déterminée par cette figure soit moindre que celle de toute autre surface se terminant au même contour.

Cette propriété, qu'on peut regarder comme caractéristique, et sur laquelle M. Monge insiste en plusieurs endroits de son *Application de l'analise à la géométrie*, paraît précisément avoir été le fondement des scrupules de notre estimable professeur. « Soit tracée » en effet, dit-il, sur la surface prétendue *minimum*, et que nous » supposons déterminée par des conditions qui la rende différente » d'une surface plane; soit tracée, dis-je, sur cette surface une » courbe plane fermée quelconque; on pourra à la portion de » surface circonscrite par cette courbe substituer une surface plane, » se terminant au même contour; surface de moindre étendue qu'elle, » et qui, réunie à la partie excédante, formera conséquemment » une surface totale moindre que la surface prétendue *minimum*. » La conclusion de ce raisonnement serait qu'il n'existe point d'autre surface *minimum* que le plan, et que conséquemment, lorsque les limites données de la surface *minimum* demandée sont de nature à ce que cette surface ne puisse être plane, il ne saurait proprement y avoir de surface *minimum*; conclusion que la géométrie et la mécanique semblent également s'accorder à repousser.

Ne serait-il pas plus exact de remplacer ce raisonnement par le suivant : « Entre des lignes droites ou courbes, planes ou à double » courbure, invariables de nature et de situation, il existe toujours » une surface de moindre étendue que toute autre surface déterminée » par les mêmes lignes; puisqu'on peut toujours concevoir une toile » parfaitement flexible et élastique tendue entre ces limites; et qu'il » faudra bien enfin que cette toile affecte une forme déterminée. »

« Supposons que ces limites soient telles que la surface *minimum* » ne puisse être plane; si l'on pouvait tracer sur elle une figure » plane fermée quelconque; en substituant à la portion de surface » comprise dans l'intérieur de cette figure la surface plane terminée

» au même contour, on obtiendrait une aire totale moindre que » la première, qui conséquemment ne saurait être un *minimum*. »

» Donc la surface *minimum*, entre des limites données, doit » être telle qu'il soit impossible de tracer sur elle aucune figure plane » fermée; ou, ce qui revient au même, d'en détacher aucune » portion, limitée dans tous les sens, par une section plane. »

» Or, comme c'est là ce qui arriverait infailliblement, si la sur- » face avait, du moins dans quelques points, ses deux courbures » dirigées dans le même sens, il en faut conclure que la surface » *minimum*, entre des limites données, doit avoir, dans toute son » étendue, ses deux courbures de signes contraires »; et c'est précisément ce qu'apprend l'analise.

Mais poussons plus loin. Par un point quelconque de cette surface, menons-lui, dans une direction quelconque, deux tangentes perpendiculaires l'une à l'autre; et considérons les fibres de cette surface, supposée élastique, dont la direction est la même que celle de ces deux tangentes. Ces fibres seront courbées en sens inverse, et ne le seront que par contrainte, à raison de leur élasticité; chacune d'elles fera donc effort pour se redresser, et conséquemment pour augmenter la courbure de l'autre; et, puisqu'elles se font équilibre, les deux efforts inverses devront être égaux. Mais ils sont évidemment proportionnels aux rayons de courbure des courbes qu'affectent respectivement les deux fibres, au point où elles se coupent; donc ces deux rayons de courbure doivent être égaux.

Or, si l'on suppose que les deux tangentes dont il s'agit soient, pour chaque point, dirigées suivant les deux courbures de la surface; les deux rayons de courbure dont il est question ici deviendront les rayons de courbure même de cette surface.

Il résulte donc de ce qui précède que, non seulement la surface *minimum* doit avoir, en tous ses points, ses deux courbures principales de signes contraires, mais que de plus ces courbures doivent être égales. Nous ne prétendons point, au surplus, donner ce raisonnement pour une démonstration proprement dite; mais on voit

cependant qu'il en renferme le germe, et qu'il suffit du moins pour faire pressentir les résultats d'une analise plus rigoureuse ; ce qui est, dans bien des cas, d'un très-précieux avantage.

Loin donc qu'il soit paradoxal de dire que la surface dont les deux rayons de courbure sont, en chacun de ses points, égaux et de signes contraires, soit en même temps celle dont l'aire est un *minimum* ; loin que l'on conçoive possible de prouver qu'elle ne l'est pas, il nous semble, au contraire, qu'il est peu de propositions aussi faciles à deviner ; parce qu'il en est peu, en effet, qui soient aussi exactement conformes aux indications du simple bon sens.

Mais, dira-t-on encore, en accordant, si l'on veut qu'il soit impossible de tracer, sur la surface *minimum*, une figure plane exactement fermée, du moins sera-t-il toujours possible de la couper par un plan, de manière à obtenir, pour ses intersections avec lui, deux courbes distinctes, telles que seraient, par exemple, deux hyperboles opposées ; et si, entre ces deux courbes, on substitue le plan à la portion correspondante de la surface prétendue *minimum*, on obtiendra un total moindre que cette surface, qui conséquemment ne saurait jouir réellement de la propriété qu'on lui attribue.

Ce raisonnement pourrait être bon, s'il s'agissait d'une surface qui dût jouir indéfiniment de la propriété du *minimum* ; et, dans ce cas, la surface demandée ne saurait être qu'un plan ; mais il s'agit d'une surface qui jouisse de cette propriété parmi toutes celles qui ont des limites fixes données, c'est-à-dire, parmi toutes celles qui se terminent au même contour. Or, lorsque deux surfaces sont simplement assujetties à passer par deux courbes données, isolées l'une de l'autre, et que ces deux surfaces ne se confondent pas, il est impossible de les comparer sous le rapport de leurs aires ; puisqu'elles sont indéfinies l'une et l'autre, et ne se terminent point au même contour.

Ces difficultés ainsi éclaircies, venons à la solution de la question proposée.

Solution du problème proposé à la page 99 de ce volume ;

Par M. Tédénat, correspondant de l'institut, recteur de l'académie de Nismes.



PROBLÈME. *Couper un cube en deux parties, de telle manière que la section vienne se terminer aux diagonales inverses de deux faces opposées, et que l'aire de cette section, terminée à la surface du cube, soit un* minimum ?

Donner, en outre, l'équation de la courbe suivant laquelle la surface coupante coupe chacune des autres faces de ce cube ?

Solution. Soient A, B, C, D les quatre sommets de la base inférieure, et A′, B′, C′, D′ leurs correspondans dans la base supérieure. Soient, en outre, O, O′ les centres respectifs de ces deux bases. En supposant, pour fixer les idées, le cube tellement disposé que l'axe OO′ soit vertical, ses deux bases seront horizontales.

Concevons que, par OO′ on conduise un plan vertical, parallèle à AB, CD, A′B′, C′D′ ; son intersection avec le cube sera un quarré dont les bases seront horizontales, et conséquemment les deux autres côtés verticaux.

Concevons la surface de ce quarré comme formée de fibres élastiques verticales et horizontales se croisant à angles droits, et se terminant à ses côtés opposés. Si l'on fait éprouver à ce quarré, autour de OO′, un double mouvement de torsion et d'extension, de manière que ses deux bases parcourent, en sens inverse, un demi-angle droit, en prenant la grandeur et la direction des diagonales inverses des deux bases du cube, sans que les points O

et O′ cessent d'en être les milieux; le plan de ce quarré deviendra ainsi une surface courbe; et, comme cette surface sera évidemment celle que formerait une toile parfaitement flexible et élastique, assujettie aux diagonales inverses des deux bases du cube; ce sera évidemment la surface *minimum*; c'est-à-dire, la surface demandée. Cherchons donc l'équation de cette surface.

Dans le mouvement de torsion du quarré, on peut concevoir que les deux bases tournent, d'un mouvement égal et contraire, autour des points O, O′, jusqu'à ce qu'elles soient devenues perpendiculaires l'une à l'autre; les fibres horizontales n'étant sollicitées que par des forces qui sont elles-mêmes horizontales, conservent cette direction, et ne font que tourner simplement, autour du point où elles coupent l'axe OO′, dans un plan parallèle à ceux des bases du cube, en demeurant toujours rectilignes (*).

On voit aisément que la fibre horizontale, également distante des deux bases, se trouvant ainsi également sollicitée, dans deux diversions contraires, à tourner horizontalement sur le point où elle occupe OO′, ne prendra réellement aucun mouvement; de sorte qu'après la torsion terminée, elle formera des angles égaux et demi-droits avec les diagonales inverses des deux bases du cube auxquelles doit aboutir la surface dont il s'agit.

On peut dire, plus généralement, que, si l'on considère trois fibres horizontales, également distantes entre elles dans leur situation primitive; après la torsion exécutée, la fibre intermédiaire devra former des angles égaux avec les deux fibres extrêmes.

Il résulte évidemment de là qu'en général l'angle de deux fibres horizontales quelconques sera, après la torsion, proportionnel à la

(*) On pourrait raisonnablement demander si cette direction rectiligne des fibres horizontales n'éprouvera pas quelque altération, par l'effet de la résistance des fibres verticales à la courbure qu'elles seront peut-être contraintes de prendre pour obéir au mouvement des premières.

J. D. G.

distance qui les sépare, ou, ce qui revient au même, à la portion de l'axe OO′ interceptée entre elles (*); et c'est conséquemment en exprimant analitiquement cette propriété que nous parviendrons à l'équation de la surface cherchée.

Soient donc pris l'axe OO′ pour axe des z, son milieu pour origine, et les z positifs du côté de la base supérieure du cube. Soient pris les axes des x et des y respectivement parallèles aux côtés des deux bases de ce cube ; de telle sorte que des deux diagonales inverses, auxquelles doit aboutir la surface cherchée, celle qui appartient à la base supérieure tombe dans les angles des x et y de mêmes signes, tandis que l'autre sera située dans les angles des x et y de signes contraires. Supposons encore que le mouvement de torsion s'exécute des x positifs vers les y positifs, de manière que la fibre horizontale immobile soit dirigée suivant l'axe des x. Nommons enfin $2a$ l'arête du cube.

La diagonale supérieure, distante du plan des xy de la quantité a, fait avec l'axe des x ou la fibre immobile un angle $\frac{1}{4}\varpi$; mais toute autre fibre horizontale, distante de la quantité z du même plan, fait avec cette même fibre fixe un angle dont la tangente tabulaire est $\frac{y}{x}$; ainsi, on doit avoir

$$\frac{z}{a}=\frac{\text{Arc}(\text{Tang.}=\frac{y}{x})}{\frac{1}{4}\varpi};$$

c'est-à-dire,

$$z=\frac{4a}{\varpi}\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{y}{x}\right),$$

ou encore

(*) Cela revient évidemment à dire que cette surface est celle qu'engendre une droite horizontale, tournant autour de l'un de ses points, d'un mouvement uniforme, tandis que ce point se meut, aussi uniformément dans une direction verticale : c'est la courbe rampante circulaire de M. Monge.

J. D. G.

$$y = x\,\text{Tang.}\,\frac{\pi z}{4a}.$$

Toute valeur constante donnée à z dans cette équation la réduira à celle d'une ligne droite, ainsi que cela doit être, puisque les fibres horizontales sont rectilignes; mais on voit qu'il n'en sera pas de même des valeurs constantes données à x ou y, qui conserveront à l'équation sa forme transcendante. On trouvera, en particulier, pour les intersections de la surface dont il s'agit avec les deux faces du cube parallèles aux plans des yz, la double équation

$$y = \pm a\,\text{Tang.}\,\frac{\pi z}{4a};$$

Il faudrait bien se garder de confondre cette surface avec la surface gauche du second ordre qu'engendre, par son mouvement, une droite qui, passant constamment par les diagonales inverses des deux bases de notre cube, ne cesse point, dans son mouvement, d'être parallèle au plan des yz. L'équation de cette surface est évidemment

$$y = \frac{xz}{a};$$

et ses intersections avec la surface du cube sont quatre diagonales formant un quadrilatère gauche; elle coupe d'ailleurs la surface à laquelle nous venons de parvenir snivant les axes des x et des z.

Si l'on demandait généralement de déterminer la surface *minimum*, entre des limites données; en posant, suivant l'usage, $dz = p\,dx + q\,dy$, $d^2z = r\,d^2x + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2$, on remarquerait que l'élément de cette surface étant $dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}$, l'équation du problème doit être

$$\delta\int\!\!\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1+p^2+q^2}=0\ ;$$

En traitant cette équation par les procédés connus de la méthode des variations, on parvient, comme l'on sait, à l'équation du second ordre

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0\ , \qquad\qquad (A)$$

commune à toutes les surfaces qui ont, en chacun de leurs points, leurs deux courbures égales et de signes contraires.

Il est facile de s'assurer que l'équation

$$z=\frac{4a}{\varpi}\,\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{y}{x}\right) \qquad\qquad (B)$$

est comprise, comme cas particulier dans cette équation générale; on en tire en effet

$$p=-\frac{4a}{\varpi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\ , \qquad q=+\frac{4a}{\varpi}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\ ,$$

$$r=+\frac{8a}{\varpi}\cdot\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\ , \quad s=+\frac{4a}{\varpi}\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ , \quad t=-\frac{8a}{\varpi}\cdot\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\ .$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (A), réduit son premier membre à zéro (*).

(*) Cette vérification dissipe complètement les doutes qu'aurait pu laisser dans l'esprit le raisonnement qui a servi à parvenir à l'équation (B); et il est certain que cette équation est celle d'une surface qui, passant par nos diagonales inverses, jouit en outre de cette propriété; que la portion qu'on en pourra comprendre dans une figure fermée quelconque, aura moins d'étendue que la portion correspondante de toute autre surface courbe se terminant au même

L'équation

L'équation (A) a été intégrée par M. Legendre dans les *Mémoires de l'académie des sciences* de Paris, pour 1787. Ce géomètre a trouvé que α et β étant les deux racines de l'équation

$$(1+q^2)\alpha^2-2pq\alpha+(1+p^2)=0\,, \qquad \text{(C)}$$

en posant

$$A=\sqrt{-1-\alpha^2}\,, \qquad B=\sqrt{-1-\beta^2}\,;$$

---

contour. Mais, de toutes les surfaces passant par nos diagonales inverses, est-elle la seule qui résolve le problème ? Ne pourrait-on pas, par exemple, demander la moindre surface entre toutes celles qui passent par le quadrilatère gauche que détermine sur la surface du cube la surface gauche du second degré dont il a été question tout-à-l'heure ? et cette surface *minimum*, qui doit être différente de notre surface du second ordre, et dont l'existence ne parait guère pouvoir être contestée, ne sera-t-elle pas moindre que la surface *minimum* dont il est question dans la présente solution ? En un mot, par combien de courbes données peut-on se proposer de faire passer une surface *minimum*, pour que cette surface soit possible et unique ? C'est là un point sur lequel aucun des traités d'analise, même les plus complets, ne s'exprime nettement.

Quoi qu'il en soit; toujours est-il vrai de dire que rien ne prouve que la surface *minimum* trouvée ici soit celle qui résout la question, telle qu'elle a été proposée. Il ne s'agissait pas simplement, en effet, de trouver la surface de moindre étendue, entre toutes celles qui passent par les diagonales inverses des deux bases du cube; mais de trouver, entre toutes les surfaces qui passent par ces diagonales, celle dont la partie *interceptée dans le cube* a la moindre étendue possible; et il se pourrait fort bien que la surface gauche du second ordre, qui pourtant n'est pas la moindre de toutes celles qui remplissent cette condition, fût néanmoins, entre ces limites, d'une moindre étendue que celle qu'on donne ici. Ce serait, au surplus, une chose facile à vérifier.

Le problème général, dont celui-ci est un cas particulier, serait le suivant : Deux portions de courbes, isolées l'une de l'autre, se terminant de part et d'autre à deux surfaces courbes, aussi isolées l'une de l'autre étant données; faire passer par ces deux courbes une surface dont l'étendue, comprise entre elles et les deux surfaces données, soit la moindre possible ?

J. D. G.

l'intégrale de cette équation (A) était le résultat de l'élimination de α et β entre les trois équations,

$$x=\varphi'(\alpha)+\psi'(\beta)\,, \qquad (1)$$

$$y=\varphi(\alpha)-\alpha\varphi'(\alpha)+\psi(\beta)-\beta\psi'(\beta)\,, \qquad (2)$$

$$z=\int A\varphi''(\alpha)\mathrm{d}\alpha-\int B\psi''(\beta)\mathrm{d}\beta\,; \qquad (3)$$

φ', ψ', φ'', ψ'' désignant des dérivées des deux premiers ordres.

Pour en déduire la forme des fonctions φ et ψ qui convient à la surface dont il s'agit, nous remarquerons que la première revient à

$$x=\varphi'\left(\frac{pq+\sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}\right)+\psi'\left(\frac{pq-\sqrt{-1-p^2-q^2}}{1+q^2}\right)\,;$$

mais nous avons trouvé, d'un autre côté,

$$z=\frac{4a}{\varpi}\,\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{y}{x}\right)$$

$$p=-\frac{4a}{\varpi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\,, \qquad q=+\frac{4a}{\varpi}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\,,$$

d'où l'on voit que, lorsque $x=0$, on doit avoir $q=0$; donc

$$0=\varphi'(\sqrt{-1-p^2})+\psi'(-\sqrt{-1-p^2})\,;$$

ce qui nous apprend que les deux fonctions φ' et ψ' sont ici de la même forme; de sorte que nous pouvons poser

$$x=2\varphi'(\alpha)\,;$$

les deux racines de l'équation (C) sont donc égales, et conséquemment on doit avoir

$$1+p^2+q^2=0 \ , \ \text{d'où} \ 1+p^2=-q^2 \ \text{et} \ 1+q^2=-p^2 \ ;$$

donc

$$x=2\varphi'\left(\frac{pq}{1+q^2}\right)=2\varphi'\left(-\frac{q}{p}\right)=2\varphi'(\alpha) \, .$$

Mais, en éliminant y et z entre l'équation

$$y=x\,\text{Tang.}\frac{\pi z}{4a} \ ,$$

et ses deux différentielles du premier ordre; on obtient

$$x=\frac{4a}{\pi}\cdot\frac{q}{p^2+q^2}=-\frac{4a}{\pi}q=-\frac{4a}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{-1-\alpha^2}}{\alpha} \ ;$$

on a donc d'un côté

$$x=2\varphi'(\alpha) \ ;$$

et de l'autre

$$x=-\frac{4a}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{-1-\alpha^2}}{\alpha} \ ;$$

donc

$$2\varphi'(\alpha)=-\frac{4a}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{-1-\alpha^2}}{\alpha} \ , \ \text{d'où} \ \varphi'(\alpha)=-\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{A}{\alpha} \, .$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de géométrie, dépendant de la méthode des variations. (*)

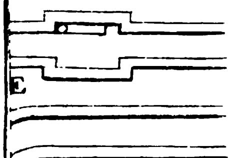
I. Entre toutes les surfaces qui passent par le contour d'un même quadrilatère gauche dont les angles et les côtés sont donnés, quelle est celle dont la partie interceptée entre les côtés de ce quadrilatère est la moindre possible ?

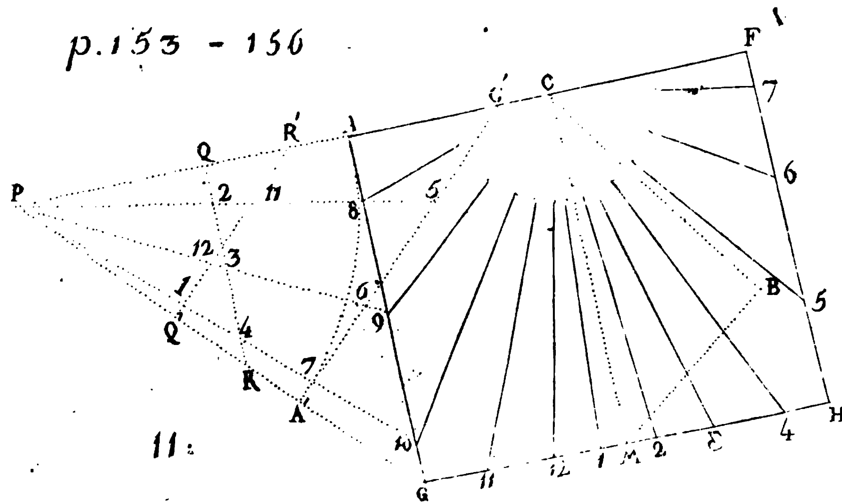
II. Entre toutes les surfaces qui passent par les circonférences des deux cercles donnés de grandeur et de situation dans l'espace, quelle est celle dont l'étendue, entre ces mêmes circonférences, est la moindre possible ?

III. Quelle est la moindre des surfaces qui, se terminant au périmètre d'un quarré donné, comprennent entre elles et ce quarré une volume donné ?

IV. Quelle est entre toutes les surfaces qui, se terminant au périmètre d'un quarré donné, ont, entre ces limites, une aire donnée, celle qui renferme le plus grand volume entre elle et ce quarré.

(*) Le lecteur voudra bien se rappeler qu'un autre problème du même genre a été proposé à la page 68 de ce volume, et est demeuré jusqu'ici sans solution.


E
a
10.


p. 153 - 156
F
7
C
R'
Q
P
2
11
8
5
6
12
3
1
6
9
Q'
4
B
5
K
7
A
11.
10
G
11
12
1
M
2
3
4
H

ARITHMÉTIQUE.

Sur divers moyens d'abréger la multiplication;

Par M. GERGONNE.



On s'est occupé, dans tous les temps, de la recherche des moyens les plus propres à abréger la multiplication des grands nombres. Parmi ces moyens, l'usage des logarithmes a généralement prévalu et conservera probablement toujours le premier rang. Il est, en effet, peu de méthodes abrégées qui soient aussi expéditives; et ce n'est pas seulement les multiplications qu'elle abrège, mais encore trois autres opérations, dont deux en particulier sont bien d'une autre difficulté. Les logarithmes d'ailleurs ne sont point seulement utiles, comme moyens d'abréviation; mais leur usage est tout-à-fait indispensable dans une multitude de recherches mathématiques.

On ne doit donc pas être surpris que cette ingénieuse invention ait presque fait entièrement oublier d'autres inventions plus anciennes, telles que les baguettes de Néper, la machine arithmétique de Pascal, etc. Cependant, sous le point de vue théorique, on ne saurait douter que ces divers moyens d'économiser le temps et d'éviter une trop forte contention d'esprit, dans la pratique du calcul, ne doivent continuer à offrir un véritable intérêt aux géomètres de profession.

On peut remarquer d'ailleurs que, excepté dans les recherches approximatives, ce qui est, il est vrai, le cas le plus fréquent, le calcul par logarithmes ne peut guère être appliqué qu'à de petits

nombres, c'est-à-dire, aux seuls nombres à l'égard desquels on consentirait très-volontiers à se passer d'un semblable intermédiaire. On peut remarquer, en outre, que les tables logarithmiques, d'une construction compliquée, sont par là même assez difficiles à vérifier, que les interpolations que leur usage nécessite si fréquemment, sont ou laborieuses ou peu exactes; et qu'en un mot l'emploi de ces logarithmes, qui ne sont à peu près tous que des nombres approchés, semble s'écarter, en quelque sorte, de cette rigueur si précieuse aux yeux des véritables géomètres. Ajoutons enfin que, pour se servir surement et avec célérité des tables de logarithmes, il est presque indispensable d'avoir, sur ces sortes de fonctions, des connaissances théoriques qu'on ne parviendra jamais que difficilement à mettre à la portée de tout le monde; ce qui fait qu'on ne peut guère se promettre d'étendre généralement l'usage de ces tables aux calculs vulgaires.

C'est sans doute dans cette vue qu'on a cherché à étendre la table de Pythagore; et on trouve en effet des tables de ce genre qui sont poussées jusqu'au quarré de 25; mais on sent qu'en les poussant même jusqu'au quarré de 100, le secours qu'elles offriraient serait loin encore d'être en proportion avec les usages les plus ordinaires; et, qu'en voulant les étendre au-delà, leur excessif volume les rendrait à la fois d'un prix élevé, et d'un usage incommode.

La table de Pythagore est une *table à double entrée*; et M. Laplace a observé (*) que souvent, au moyen d'un calcul préalable assez facile, une telle table peut être suppléée par une simple série, c'est-à-dire, par une *table à simple entrée*, ou à un seul argument. Cet illustre géomètre en donne plusieurs exemples qu'il déduit d'une analise de nature à en fournir beaucoup d'autres encore. Notre but ici est beaucoup moins élevé; et nous nous proposons seulement de faire voir, par les règles élémentaires de l'algèbre, qu'on peut obtenir, par des tables à simple entrée, non seulement

(*) *Journal de l'école polytechnique*, XV.e cahier, page 258.

le produit de deux facteurs, mais même le produit de tant de facteurs qu'on voudra.

I. On a, par les premières règles de l'algèbre,

$$4ab=(a+b)^2-(a-b)^2 \; ; \quad (*)$$

ce qui veut dire, en français, que, *si du quarré de la somme de deux nombres on retranche le quarré de leur différence, on obtiendra pour reste, le quadruple de leur produit.*

Il suit de là que, si l'on avait une table suffisamment étendue des quarrés de tous les nombres de la suite naturelle, on pourrait, par son moyen, obtenir *exactement* le produit de deux nombres qui n'excèderait pas ses limites, sans avoir autre chose à faire qu'une addition, deux soustractions et une division par 4.

Exemple. On propose de trouver le produit de 531 par 479?

Facteurs donnés	531 479		
Somme.	1010	quarrés	1020100
Différence. . .	52		2704
Différence des quarrés. . .			1017396
Quart de cette différence, ou produit. . .			254349

Or, il existe une semblable table : elle a été publiée chez *F. Didot*, en 1801, sous le nom de C. SÉGUIN l'aîné, mais dans toute autre

(*) Si, dans cette équation, on change a en 1 et b en $A^2+B^2+C^2+D^2+\ldots$; elle deviendra, en renversant,

$$(1+A^2+B^2+C^2+\ldots)^2-(1-A^2-B^2-C^2-\ldots)^2=(2A)^2+(2B)^2+(2C)^2+\ldots$$

Cette remarque est due à M. Frégier, ancien élève de l'école polytechnique.

vue que celle qui nous occupe ici. Elle est précédée d'une introduction très-détaillée, qui indique tout le parti qu'on en peut tirer. on a donc lieu d'être surpris que l'auteur qui, dans cette introduction, se montre géomètre, n'ait pas songé à l'usage que nous venons de faire de sa table.

Malheureusement cette table ne donne les quarrés des nombres que jusqu'à 10000 seulement; mais il serait facile de la prolonger au-delà; et l'on conçoit que si, par exemple, on voulait la pousser jusqu'à 100000, il suffirait, comme dans les tables de logarithmes, de la faire commencer à 10000; attendu que tout ce qu'on pourrait mettre auparavant ferait double emploi.

Cette table serait d'autant plus facile à prolonger que les séries de chiffres des différens ordres y forment constamment des suites périodiques; de sorte que, pour la construire, on n'a, pour ainsi dire, que la peine d'écrire. Ainsi, par exemple, pour les unités la période, qui a *dix* termes, est

0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1;

pour les dixaines, la période qui a *quarante-sept* termes est

0,0,0,0,1,2,3,4,6,8,0,2,4,6,9,2,5,8,2,6,0,4,8,2,7,
2,7,2,8,4,0,6,2,8,5,2,9,6,4,2,0,8,6,4,3,2,1;

et ainsi de suite; on pourrait même réduire ces périodes à moitié, en observant que chacune se compose de deux autres qui ne sont que le renversement l'une de l'autre.

Voilà donc deux avantages incontestables des tables dont il est question ici: c'est, d'une part, leur facile construction que l'on pourrait en quelque sorte mettre en fabrique, comme celle des indiennes et papiers imprimés; c'est, d'une autre, la facile vérification qui en résulte, et qui est telle qu'il est presque impossible qu'il s'y glisse une faute, sans qu'aussitôt elle soit aperçue (*).

(*) On pourrait également former ces tables par des additions successives, et je ne sais pas même si ce ne serait pas là le moyen à la fois le plus court et le plus commode.

Un autre avantage que présentent ces sortes de tables, c'est que, si l'interpolation y est un peu plus laborieuse que dans les tables de logarithmes, elle a sur celle-là l'avantage de pouvoir toujours être rigoureuse, puisque la suite des quarrés des nombres naturels est une suite aux secondes différences constantes et égales à *deux*.

La formule générale de l'interpolation, pour les suites aux secondes différences constantes est, comme l'on sait,

$$y=b+(x-a)\Delta b+(x-a)(x-a-1)\frac{\Delta^2 b}{2};$$

a et x étant respectivement les indices de b et y; mais ici où $\Delta^2 b=2$, on aura simplement

$$y=b+(x-a)(x-a-1+\Delta b)=b+(x-a)(x-a+\Delta b-1).$$

Supposons donc qu'avec les tables de M. Séguin on ait besoin du quarré de 543627; on cherchera celui de 5436,27 tombant entre 5436 et 5437, dont les quarrés sont respectivement 29550096 et 29560969 dont la différence est 10873; on aura donc ici

$$a=5436, \qquad b=29550096,$$
$$x=5436,27, \qquad \Delta b=10873;$$

donc

$$y=(5436,27)^2=29550096+0,27.10872,27;$$

ou bien

$$(5436,27)^2=29553031,5129;$$

donc enfin

$$(543627)^2=295530315129.$$

Au moyen d'un semblable calcul, la table de M. Séguin pourra servir pour les nombres supérieurs à ceux pour lesquels elle a été calculée, ainsi que pour les nombres fractionnaires; et elle donnera, dans tous les cas, des résultats rigoureusement exacts. Il serait

seulement à désirer qu'elle contint les différences des quarrés consécutifs. L'impression en est d'ailleurs très-soignée et très-correcte.

Un homme qui paraît être beaucoup moins géomètre que M. Séguin, mais qui pour cela même n'en a peut-être que plus de mérite, M. ANTOINE VOISIN, a su apercevoir, par ses propres réflexions, du moins à ce qu'il parait, le parti qu'on pourrait tirer d'une table des quarrés des nombres naturels pour abréger les multiplications, et il vient de publier, sous la dénomination, impropre d'ailleurs, de tables de logarithmes, une table des quarrés des nombres naturels, étendue jusqu'à 20000 (*). Mais, dans la vue d'éviter au calculateur la peine légère d'une division par 4, l'auteur n'a inscrit dans sa table que le quart de chaque quarré, en rejetant l'unité de surplus pour les quarrés impairs. En conséquence, lorsque, des deux facteurs à multiplier, l'un est pair et l'autre impair, le résultat se trouve fautif en moins d'une unité qu'il faut lui restituer. Pour la même raison, lorsqu'on veut avoir, au moyen de cette table, le quarré d'un nombre impair; il faut non seulement multiplier le nombre qu'on trouve dans la table par 4, mais encore ajouter une unité au produit.

L'auteur annonce qu'il a le dessein de prolonger sa table jusqu'à 100000; mais, s'il l'exécute, nous pensons qu'il fera bien d'y inscrire tout simplement les quarrés des nombres naturels, à partir de 10000 seulement, et de placer dans une colonne à droite les différences consécutives de ces quarrés. Il aura ainsi une table qui pourra servir à beaucoup d'autres usages que celui qu'il a eu spécialement en vue, en dressant celle qu'il vient de publier.

Lorsqu'on veut obtenir, au moyen de pareilles tables, le produit de trois facteurs, il se présente tout naturellement de chercher d'abord le produit des deux premiers, et ensuite le produit du résultat obtenu par le troisième. On pourrait aussi construire, pour

(*) Cette table in-12, qui renferme 150 pages d'impression, se trouve chez M.me veuve Courtier, à Paris.

cet effet, une table à triple entrée ; mais nous allons voir que cette table, comme la table à double entrée, peut être suppléée, avec avantage, par une table à un seul argument.

II. On a, par les premières règles de l'algèbre,

$$24abc=(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3 ;$$

d'où l'on voit qu'avec une simple table des cubes des nombres naturels, on peut obtenir, tout d'un coup, le produit de trois facteurs, au moyen de quelques additions et soustractions et d'une division par 24, laquelle se réduit à deux divisions consécutives par 6 et par 4. Or, l'ouvrage de M. Séguin, que j'ai cité plus haut, outre les quarrés des nombres naturels, renferme aussi leurs cubes ; on peut donc s'en servir, avec avantage, pour déterminer immédiatement le produit de trois facteurs, en se conduisant comme dans l'exemple suivant.

Exemple. On propose de déterminer le produit des trois facteurs 731 ; 471, 317.

$$\begin{array}{lll}
(731+471+317)^3=1519^3= \ldots\ldots\ldots & & 3504881359 \\
(471+317-731)^3=57^3=\ldots\ldots185193 & \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\} & \\
(317+731-471)^3=577^3=192100033 & & 885439351 \\
(731+471-317)^3=885^3=693154125 & & \\
\hline
\text{24 fois le produit} & = & 2619442008 \\
\text{4 fois le produit} & = & 436573668 \\
\text{Produit cherché} & & 109143417 .
\end{array}$$

Ici encore les interpolations pourront être faites rigoureusement ; mais elles seront un peu plus laborieuses que dans la table des quarrés ; puisque, dans la suite des cubes, ce sont seulement les troisièmes différences qui sont constantes.

III. On peut pousser plus loin encore, et, si l'on veut déterminer immédiatement le produit de quatre facteurs : on aura pour cela la formule

$$192abcd=(a+b+c+d)^4-(a+b+c-d)^4$$
$$+(a+b-c-d)^4-(b+c+d-a)^4$$
$$+(a+c-b-d)^4-(c+d+a-b)^4$$
$$+(b+c-a-d)^4-(d+a+b-c)^4.$$

Il faudrait donc ici une table des quatrièmes puissances des nombres naturels ; mais, comme ces puissances sont des quarrés de quarrés, la table de M. Séguin suffira encore.

Si l'on avait une table des cinquièmes puissances des nombre naturels, on pourrait également en déduire immédiatement le produit de cinq facteurs ; on aurait pour cela la formule

$$1920abcde=(a+b+c+d+e)^5-(b+c+d+e-a)^5$$
$$+(a+b+c-d-e)^5-(c+d+e+a-b)^5$$
$$+(a+b+d-c-e)^5-(d+e+a+b-c)^5$$
$$+(a+c+d-b-e)^5-(e+a+b+c-d)^5$$
$$+(b+c+d-a-e)^5-(a+b+c+d-e)^5$$
$$+(a+b+e-c-d)^5$$
$$+(a+c+e-b-d)^5$$
$$+(b+c+e-a-d)^5$$
$$+(a+d+e-b-c)^5$$
$$+(b+d+e-a-c)^5$$
$$+(c+d+e-a-b)^5;$$

La

La loi de ces formules est facile à saisir. Si le nombre des facteurs dans le premier membre est m, son coefficient sera $(1.2.3...m)\,2^{m-1}$. Le second membre contiendra des m.^{mes} puissances de polynômes, de m termes chacun, formés de tous les facteurs dont il s'agit; ces polynômes seront au nombre de 2^{m-1}. Il y en aura un et un seul où tous les termes seront positifs ; m où chaque terme sera à son tour négatif; $\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}$ ou deux termes seront tour-à-tour négatifs et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à rendre la moitié des termes négatifs, si m est pair, ou la moitié de $m-1$, si m est impair. Ces puissances de polynômes ont d'ailleurs le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que le nombre de leurs termes négatifs est pair ou impair.

IV. Dans le mémoire cité plus haut, M. Laplace rappelle qu'environ un siècle avant l'invention des logarithmes, on avait déjà eu l'idée ingénieuse de faire servir les tables de sinus naturels à abréger les multiplications, et cela au moyen de la formule

$$2\text{Cos.}a\text{Cos.}b=\text{Cos.}(a-b)+\text{Cos.}(a+b)\;;$$

En séparant, en effet, sur la droite des deux facteurs un nombre de chiffres décimaux suffisant pour les rendre l'une et l'autre moindres que l'unité, on pourra les considérer comme les cosinus tabulaires des deux arcs a, b, que l'on trouvera dans les tables. Cherchant donc, dans les mêmes tables, les cosinus de $a+b$ et de $a-b$; leur demi-somme, en y rétablissant la virgule où il convient, sera le produit cherché.

Rien n'est plus facile que d'étendre cette méthode à la recherche immédiate du produit de trois ou d'un plus grand nombre de facteurs; on a, en effet,

$$4\mathrm{Cos.}a\mathrm{Cos.}b\mathrm{Cos.}c=\mathrm{Cos.}(a+b+c)+\mathrm{Cos.}(b+c-a)$$
$$+\mathrm{Cos.}(c+a-b)$$
$$+\mathrm{Cos.}(a+b-c)$$

$$8\mathrm{Cos.}a\mathrm{Cos.}b\mathrm{Cos.}c\mathrm{Cos.}d=\mathrm{Cos.}(a+b+c+d)+\mathrm{Cos.}(b+c+d-a)$$
$$+\mathrm{Cos.}(a+b-c-d)+\mathrm{Cos.}(c+d+a-b)$$
$$+\mathrm{Cos.}(a+c-b-d)+\mathrm{Cos.}(d+a+b-c)$$
$$+\mathrm{Cos.}(b+c-a-d)+\mathrm{Cos.}(a+b+c-d)$$

et ainsi de suite.

La loi de ces formules ne diffère de celle des précédentes que dans les seuls points que voici : si m est le nombre des facteurs, le coefficient du premier membre sera simplement 2^{m-1} ; il faudra, dans cè même premier membre, substituer les cosinus de a, b, c, ..., à ces lettres elles-mêmes ; il faudra finalement, dans le second membre, changer les m.^{mes} puissances en cosinus, et affecter indistinctement tous ces cosinus du signe $+$.

Nous pensons qu'en voilà assez pour faire voir que ce ne sont point seulement les tables à double entrée que l'on peut remplacer par des tables à un seul argument. On voit, eu effet, par ce qui précède, qu'il en est absolument de même pour les produits de facteurs variables, en quelque nombre qu'ils soient d'ailleurs.

On voit en même temps que les tables des puissances des nombres naturels ont plus d'un genre d'utilité ; mais nous pensons que pourtant les géomètres leur préfèreront toujours, et non sans raison, des tables de logarithmes.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Théorèmes divers, sur le triangle et le tétraèdre;

Par M. Frégier, ancien élève de l'école polytechnique.



THÉORÈME I. *Dans tout tronc de triangle, à bases parallèles, l'intersection des deux diagonales est en ligne droite avec les milieux des bases du tronc et le sommet du triangle.*

Démonstration. Soit pris l'angle du sommet pour angle des coordonnées. Si a et b désignent les segmens interceptés sur les axes, depuis l'origine, par l'une quelconque des deux bases du tronc, les segmens interceptés sur les mêmes axes, aussi à partir de l'origine, par son autre base, pourront être représentés par na et nb; n étant un nombre abstrait quelconque.

Les deux diagonales auront ainsi pour leurs équations

$$ay=nb(a-x)\,,\qquad bx=na(b-y)\,,$$

d'où l'on conclura encore, par l'élimination de n,

$$ay=bx\,;$$

équation d'une droite qui doit contenir le point d'intersection des deux diagonales; mais cette droite passe évidemment par l'origine et par les milieux des deux bases du tronc; le théorème est donc complètement démontré.

Remarque. Dans le cas particulier où $n=2$ ou $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, lorsque la hauteur du tronc est moitié de celle du triangle, l'intersection des deux diagonales est évidemment le centre de gravité de l'aire du triangle total.

THÉORÈME II. *Dans tout tronc de tétraèdre, à bases parallèles, les droites qui joignent les sommets de l'une quelconque des bases aux milieux des côtés de l'autre base qui leur sont respectivement opposés, concourent en un même point qui est en ligne droite avec les centres de gravité des aires des bases du tronc et avec le sommet du tétraèdre.*

Démonstration. Soient prises les trois arêtes du sommet du tétraèdre pour axes des coordonnées. Si a, b, c désignent les segmens interceptés sur ces axes, depuis l'origine, par l'une des bases du tronc, les segmens interceptés sur les mêmes axes, aussi à partir de l'origine, par l'autre base de ce tronc, pourront être représentés par na, nb, nc; n étant un nombre abstrait quelconque. Il est de plus aisé de voir que les centres de gravité des aires des deux bases auront respectivement pour équations

$$x=\tfrac{1}{3}a\,,\quad x=\tfrac{1}{3}na\,;$$

$$y=\tfrac{1}{3}b\,,\quad y=\tfrac{1}{3}nb\,,$$

$$z=\tfrac{1}{3}c\,,\quad z=\tfrac{1}{3}nc\,;$$

Lesquelles satisfont également à la double équation

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\,, \qquad (1)$$

qui est conséquemment celle de la droite qui joint le sommet ou l'origine aux centres de gravité des aires des deux bases.

Cela posé, les équations des droites qui joindront les sommets de la première base aux milieux des côtés opposés de la seconde, seront, comme il est aisé de le trouver,

$$2cx=na(c-z)\,,\quad 2cy=nb(c-z)\,,$$

$$2ay=nb(a-x)\,;\quad 2az=nc(a-x)\,;$$

$$2bz=nc(b-y)\,,\quad 2bx=na(b-y)\,.$$

Quant aux droites qui joignent, au contraire, les sommets de la seconde base aux milieux des côtés opposés de la première, elles auront respectivement pour équations

$$2ncx=a(nc-z)\,,\quad 2ncy=b(nc-z)\,,$$

$$2nay=b(na-x)\,,\quad 2naz=c(na-x)\,,$$

$$2nbz=c(nb-y)\,,\quad 2nbx=a(nb-y)\,.$$

De trois équations prises au hazard dans le premier groupe, on tire

$$x=\frac{na}{n+2}\,;\quad y=\frac{nb}{n+2}\,,\quad z=\frac{nc}{n+2}\,; \qquad (2)$$

résultats dont la symétrie prouve qu'ils doivent également satisfaire aux trois autres équations, ainsi qu'on peut directement s'en assurer; et que, par conséquent, ils expriment les coordonnées d'un point commun à nos trois premières droites.

Pareillement, trois équations prises au hasard dans le second groupe, donnent

$$x=\frac{na}{2n+1}\,,\quad y=\frac{nb}{2n+1}\,;\quad z=\frac{nc}{2n+1}\,; \qquad (3)$$

résultats dont la symétrie prouve encore; comme il est d'ailleurs facile de le vérifier, qu'ils doivent également satisfaire aux trois autres équations, et qu'ainsi ils expriment les coordonnées d'un point commun à nos trois dernières droites.

Nos trois premières droites se coupent donc en un même point (2), et les trois dernières en un autre point (3). Il est de plus aisé de voir que le point (2) comme le point (3) est sur la droite (1); ainsi le théorème est complètement démontré.

Remarque. Il est aisé de voir qu'en supposant, dans les équations (3), $n=\frac{1}{2}$, elles deviennent celles du centre de gravité du volume de tétraèdre; et, comme on a alors

$$x=\tfrac{1}{4}a\ ,\quad y=\tfrac{1}{4}b\ ,\quad z=\tfrac{1}{4}c\ ,$$

il s'ensuit que ce point est situé au milieu de la dooite qui joint les milieux des deux arêtes opposées quelconques. C'est aussi ce qui a été démontré, d'une autre manière, par M. Monge, dans la *Correspondance sur l'école polytechnique*, (tom. II, pag. 1).

Si l'on fait une projection de notre tétraèdre sur un plan quelconque, les projections des milieux des arêtes et des centres de gravité des aires des faces seront les milieux et les centres de gravité des projections de ces arêtes et de ces faces; et les projections des points en ligne droite seront situées sur les projections de ces droites. On peut donc, de notre théorème, déduire comme corollaire la proposition suivante.

Corollaire. Lorsque deux triangles, tracés sur un même plan, ont les côtés parallèles, chacun à chacun, les droites qui joignent les sommets de l'un d'eux aux milieux des côtés respectivement opposés dans l'autre, se coupent en un même point situé en ligne droite avec les centres de gravité des aires de ces triangles et leur centre de similitude.

THÉORÈME III. Si trois droites partant des sommets d'un triangle concourent en un même point, leurs parallèles respectives partant des milieux des côtés opposés concourront aussi en un même point, et réciproquement. En outre, la droite qui joindra ces deux points contiendra le centre de gravité de l'aire du triangle, lequel la divisera en deux parties dont l'une sera double de l'autre.

Démonstration. Soient A, B, C les trois sommets du triangle,

a, b, c les milieux des côtés opposés, et G son centre de gravité. a, b, c seront les sommets d'un triangle semblable à ABC, dont les côtés, moitié des siens, leur seront respectivement parallèles. Il est de plus aisé de voir que G sera le centre commun de gravité des aires de ces deux triangles, et conséquemment leur centre de similitude.

Soit P un point situé d'une manière quelconque sur le plan du triangle ABC, et soit p son homologue par rapport au triangle abc; ces deux points devront être en ligne droite avec le centre de similitude G; et, comme on a $\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CA}{ca}=2$, on devra avoir également $\frac{GP}{Gp}=2$. Enfin, les points P et p étant des points homologues; et les deux triangles ayant leurs côtés parallèles, chacun à chacun, les droites PA, PB, PC doivent être respectivement parallèles aux droites pa, pb, pc; ce qui complète la démonstration de notre théorème.

Remarque. Quoique nous ayons tacitement supposé, dans le raisonnement que nous venons de faire, que les points P et p étaient tous deux dans le plan du triangle; il est aisé de voir que ce raisonnement n'en serait pas moins concluant, quand bien même ces points seraient situés hors de ce plan. Dans ce cas, ils se trouveraient situés de différens côtés du plan du triangle.

Si le point p est le centre du cercle inscrit, le point P deviendra le point d'intersection des perpendiculaires abaissées des sommets du triangle sur les directions des côtés opposés. On peut donc de notre théorème conclure comme corollaire la proposition suivante:

Corollaire. Dans tout triangle, les perpendiculaires abaissées des sommets sur les directions des côtés opposés se coupent toutes trois en un même point, situé en ligne droite avec le centre du cercle inscrit, et le centre de gravité de l'aire du triangle. Ce dernier point est au tiers de la droite qui joint les deux autres à partir du second.

Cette dernière proposition a été démontrée pour la première fois par M. Le Français, dans son *Application de l'algèbre à la géométrie*. On voit avec quelle simplicité elle se déduit de notre théorie.

THÉORÈME IV. Si quatre droites partant des sommets d'un tètraèdre concourent en un même point de l'espace, leurs parallèles respectives, partant des centres de gravité des aires des faces opposées concourront aussi en un même point, et réciproquement. En outre, la droite qui joindra ces deux points contiendra aussi le centre de gravité du volume du tétraèdre, lequel la divisera en deux parties dont l'une sera quadruple de l'autre.

Démonstration. Soient A, B, C, D les sommets du tétraèdre; a, b, c, d les centres de gravité des aires des faces opposées, et G le centre de gravité du volume de ce tétraèdre. a, b, c, d seront les sommets d'un tétraèdre semblable à $ABCD$, dont les arêtes, quatre fois moindre que les siennes, leur seront respectivement parallèles. Il est de plus aisé de voir que G sera le centre commun de gravité des volumes de ces deux tétraèdres, et conséquemment leur centre de similitude.

Soit P un point de l'espace situé d'une manière quelconque par rapport au premier tétraèdre, et soit p son homologue par rapport au second; ces deux points devront être en ligne droite avec le centre de similitude G; et, comme on a $\frac{AB}{ab}=\frac{AC}{ac}=\frac{BC}{bc}=\frac{AD}{ad}=\frac{BD}{bd}=\frac{ED}{ed}=4$, on devra avoir aussi $\frac{PG}{pG}=4$. Enfin, les points P et p étant des points homologues et les deux tétraèdres ayant les arêtes parallèles, chacune à chacune, les droites PA, PB, PC, PD devront être respectivement parallèles à leurs homologues pa, pb, pc, pd; ce qui complète la démonstration de notre théorème.

Remarque. Il a été démontré (tom. II, pag. 141 et 143) que, dans un tétraèdre dont les arêtes opposées sont respectivement perpendiculaires, les perpendiculaires abaissées des sommets sur les plans des faces, ainsi que les perpendiculaires élevées aux plans de

de ces faces, par les centres de gravités de leurs aires, se coupaient toutes quatre au même point ; et l'on voit qu'en vertu de notre théorème, chacune de ces deux propositions est une conséquence nécessaire de l'autre. Le même théorème fait voir en outre que la droite qui joint ces deux points contient le centre de gravité du volume du tétraèdre, et que ce point la partage en deux parties dont l'une est quadruple de l'autre.

Si l'on projette le tétraèdre sur un plan quelconque, sa projection sera un quadrilatère avec ses deux diagonales ; les projections des centres de gravité des aires de ses faces seront les centres de gravité des aires de leurs projections ; les projections des droites concourrant en un même point, concourront aussi en un même point ; et les projections des droites parallèles le seront elles-mêmes. Notre théorème donne donc lieu au corollaire suivant.

Corollaire. Si quatre droites partant des sommets d'un quadrilatère concourent en un même point, leurs parallèles partant respectivement, pour chaque sommet, du centre de gravité de l'aire du triangle formé par les trois autres, concourront aussi en un même point ; et réciproquement (*).

(*) On peut consulter, pour les autres analogies entre le triangle et le tétraèdre, la page 133 du deuxième volume et la page 317 du troisième volume de ce recueil.

J. D. G.

GÉOMETRIE ANALITIQUE.

Caractères des surfaces de révolution, en général et en particulier, de celles du second ordre, dans le cas des coordonnées obliques ;

Par M. ***.



On trouve, dans le troisième volume de la *Correspondance sur l'école polytechnique* (pag. 196, 203, 205, 313), diverses méthodes pour parvenir aux conditions qui expriment que l'équation générale du second degré, à trois indéterminées, appartient à une surface de révolution, du moins en supposant que ces indéterminées expriment des coordonnées rectangulaires.

Dans le troisième volume du présent recueil (pag. 111), M. Bérard a indiqué ce qu'il faudrait faire pour étendre cette recherche au cas où la surface proposée se trouve rapportée à des axes obliques quelconques. En substituant en effet, pour a, b, c, d, dans son équation

$$(bc-9ad)^2-4(b^2-3ac)(c^2-3bd)=0\ ,$$

les coefficiens de son équation (4) (pag. 110), le premier membre de l'équation résultante doit devenir la somme de trois quarrés ; et, en égalant séparément la racine de chacun d'eux à zéro, on doit parvenir à trois équations de condition, telles que chacune d'elles

se trouve comportée par les deux autres. Malheureusement, outre que cette manière de parvenir aux conditions cherchées, qui suppose d'ailleurs la connaissance préalable de l'équation (4), est assez laborieuse, il n'est point commode d'en déduire les équations de l'axe de révolution (*).

(*) Ces inconvéniens n'ont point échappé à M. Bérard; car, dans un mémoire inédit qu'il m'a communiqué, au commencement de 1816, il présente cette recherche sous un point de vue un peu différent. Voici, en dernière analise, à quoi son procédé se réduit.

En supposant, pour plus de simplicité, la surface rapportée à son centre, ce qui ne change rien au fond de la recherche dont il s'agit, et en représentant son équation par

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=E\,; \qquad (1)$$

il a été démontré (tom. VI, pag. 168) que

$$x=mz\,,\quad y=nz\,, \qquad (2)$$

étant les équations d'un diamètre principal, on devait avoir

$$\left.\begin{array}{l}(Ar^2-E)m+(B'r^2-E\mathrm{Cos.}\beta)\;+(C'r^2-E\mathrm{Cos.}\gamma)n=0\,,\\(Br^2-E)n\;+(C'r^2-E\mathrm{Cos.}\gamma)m+(A'r^2-E\mathrm{Cos.}\alpha)\;=0\,,\\(Cr^2-E)\;\;+(A'r^2-E\mathrm{Cos.}\alpha)n+(B'r^2-E\mathrm{Cos.}\beta)m=0\,;\end{array}\right\}\;(3)$$

équations dans lesquelles r exprime la longueur de la moitié du diamètre. Si on élimine r^2 entre elles, ce qui conduira à deux équations de la forme

$$\left.\begin{array}{l}am^2+b\,mn+c\,n^2+d\,m+e\,n+f=0\,,\\a'm^2+b'mn+c'n^2+d'm+e'n+f'=0\,,\end{array}\right\}\;(4)$$

et qu'on élimine ensuite n entre ces deux-ci, on obtiendra une équation finale

On a lieu d'être surpris qu'aucun des géomètres qui se sont occupés de cette question, n'ait songé à y appliquer la transformation des coordonnées qui, comme on va le voir, dans le cas même des coordonnées obliques, conduit au but d'une manière

---

en m qui sera du troisième degré seulement et qui répondra aux trois directions qu'un diamètre principal peut avoir.

Si la surface est de révolution, l'une de ces directions doit être celle de l'axe, et les deux autres doivent demeurer indéterminées ; il faut donc alors que cette équation du 3.e degré s'anéantisse d'elle-même, c'est-à-dire, que ces quatre coefficiens doivent être égalés à zéro.

Mais les quatre équations de relation qu'on obtient ainsi peuvent être remplacées avec avantage par deux autres seulement. Pour obtenir celles-ci, on remarquera que, dans le cas dont il s'agit, pour que les équations (4) ne conduisent qu'à un seul système de valeurs de m et n, il faut qu'elles admettent un facteur commun, fonction du premier degré de ces deux quantités. Posant donc

$$m^2+\frac{b}{a}mn+\frac{c}{a}n^2+\frac{d}{a}m+\frac{e}{a}n+\frac{f}{a}=(m+pn+q)(m+\alpha n+\beta)\ ;$$

$$m^2+\frac{b'}{a'}mn+\frac{c'}{a'}n^2+\frac{d'}{a'}m+\frac{e'}{a'}n+\frac{f'}{a'}=(m+pn+q)(m+\alpha' n+\beta')\ ;$$

et exprimant séparément que chacune de ces équations est identique, on aura, d'une part, cinq équations entre p, q, α, β, et d'une autre, cinq équations entre p, q, α', β' ; faisant donc, de part et d'autre, l'élimination de ces quatre inconnues, on obtiendra les deux équations de condition cherchées.

Le calcul nécessaire pour effectuer cette élimination conduira aux valeurs de α, β, α', β'. Résolvant alors les deux équations

$$m+\alpha n+\beta=0\ ,\quad m+\alpha' n+\beta'=0\ ,$$

elles feront connaître les valeurs de m et n qui conviennent à l'axe de révolution.

Tout cela est très-exact ; mais nous pensons que le procédé que l'on va exposer pourra peut-être paraître un peu plus simple et plus symétrique.

J. D. G.

extrêmement simple, ne présuppose aucune recherche préalable, n'exige que des calculs d'une symètrie parfaite, et a sur-tout le précieux avantage de pouvoir être indistinctement appliquée aux surfaces de tous les degrés.

Pour plus de simplicité, nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que la surface est déjà rapportée à son centre. Le fait prouvera que cette supposition n'ôte absolument rien à la généralité des résultats. En conséquence, nous donnerons à l'équation de cette surface la forme suivante :

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=E\,; \qquad (1)$$

et les angles des coordonnées seront supposés α, β, γ.

Soient t, u, v les coordonnées d'un système rectangulaire de même origine que le premier. On sait qu'en posant

$$\left.\begin{aligned} t&=a\,x+b\,y+c\,z\,; \\ u&=a'x+b'y+c'z\,, \\ v&=a''x+b''y+c''z\,, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

on doit avoir

$$\left.\begin{aligned} a^2+a'^2+a''^2&=1\,, \\ b^2+b'^2+b''^2&=1\,, \\ c^2+c'^2+c''^2&=1\,; \end{aligned}\right\} \;(3)\qquad \left.\begin{aligned} bc+b'c'+b''c''&=\text{Cos.}\alpha \\ ca+c'a'+c''a''&=\text{Cos.}\beta \\ ab+a'b'+a''b''&=\text{Cos.}\gamma \end{aligned}\right\} \;(4)$$

Cela posé; lorsque la surface est de révolution, on peut la supposer d'abord rapportée aux coordonnées rectangulaires; et, en admettant que l'axe des z est l'axe de révolution, son équation sera de la forme

$$t^2+u^2=Mv^2+N \text{ (*)} \qquad (5)$$

M et N étant deux constantes dont les grandeurs et les signes particularisent la surface.

Passant ensuite aux coordonnées obliques, cette équation deviendra

$$(ax+by+cz)^2+(a'x+b'y+c'z)^2=M(a''x+b''y+c''z)^2+N\,;$$

ou, en développant, ordonnant et ayant égard aux relations (3, 4),

$$\left.\begin{array}{l}\{1-(1+M)a''^2\}x^2+\{\text{Cos}.\alpha-(1+M)b''c''\}yz\\ +\{1-(1+M)b''^2\}y^2+\{\text{Cos}.\beta-(1+M)c''a''\}zx\\ +\{1-(1+M)c''^2\}z^2+\{\text{Cos}.\gamma-(1+M)a''b''\}xy\end{array}\right\}=N. \qquad (6)$$

Cette équation ne devra donc différer de l'équation (1) que par le facteur $\frac{N}{E}$. Exprimant donc qu'il est ainsi, nous aurons les six équations

$$E\{1-(1+M)a''^2\}=AN\,,\quad E\{\text{Cos}.\alpha-(1+M)b''c''\}=A'N\,,$$

$$E\{1-(1+M)b''^2\}=BN\,,\quad E\{\text{Cos}.\beta-(1+M)c''a''\}=B'N\,,$$

$$E\{1-(1+M)c''^2\}=CN\,;\quad E\{\text{Cos}.\gamma-(1+M)a''b''\}=C'N\,.$$

En y faisant

(*) En général, v étant l'axe de révolution, l'équation d'une surface quelconque de révolution est de la forme

$$t^2+u^2=f(v)\,;$$

mais ici où la surface est du second ordre et a son centre à l'origine, on doit avoir $f(v)=Mv^2+N$; M et N étant deux constantes.

(*Note de l'auteur.*)

$$a''\sqrt{1+M}=d\ ,\ b''\sqrt{1+M}=e\ ,\ c''\sqrt{1+M}=f\ ,\ N=-kE\ ,$$

on pourra les écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned} d^2&=Ak+1\ ,\\ e^2&=Bk+1\ ,\\ f^2&=Ck+1\ ,\end{aligned}\right\}(6)\qquad \left.\begin{aligned} ef&=A'k+\text{Cos.}\alpha\ ,\\ fd&=B'k+\text{Cos.}\beta\ ,\\ de&=C'k+\text{Cos.}\gamma\ .\end{aligned}\right\}(7)$$

Ces équations ne renferment plus que les *quatre* inconnues d, e, f, k. Puis donc qu'elles sont au nombre de *six*, l'élimination de ces inconnues entre elles conduira aux deux équations de condition cherchée.

Il faudra ensuite obtenir les équations de l'axe de révolution. Ces équations, dans le système rectangulaire, étant $t=0$, $u=0$, seront dans le système oblique

$$ax+by+cz=0\ ,$$

$$a'x+b'y+c'z=0\ .$$

Prenant successivement les sommes de leurs produits par a et a', b et b', c et c', et ayant égard aux relations (3, 4), on en déduira trois nouvelles, dont chacune se trouvera comportée par les deux autres, et qui pourront être écrites ainsi

$$x+y\text{Cos.}\gamma+z\text{Cos.}\beta=a''(a''x+b''y+c''z)\ ;$$

$$y+z\text{Cos.}\alpha+x\text{Cos.}\gamma=b''(a''x+b''y+c''z)\ ,$$

$$z+x\text{Cos.}\beta+y\text{Cos.}\alpha=c''(a''x+b''y+c''z)\ ,$$

et desquelles on déduira, par l'élimination du facteur commun à leurs seconds membres,

$$\frac{x+y\,\text{Cos.}\gamma+z\,\text{Cos.}\beta}{a''}=\frac{y+z\,\text{Cos.}\alpha+x\,\text{Cos.}\gamma}{b''}=\frac{z+x\,\text{Cos.}\beta+y\,\text{Cos.}\alpha}{c''};$$

ou encore, en divisant par $\sqrt{1+M}$,

$$\frac{x+y\,\text{Cos.}\gamma+z\,\text{Cos.}\beta}{d}=\frac{y+z\,\text{Cos.}\alpha+x\,\text{Cos.}\gamma}{e}=\frac{z+x\,\text{Cos.}\beta+y\,\text{Cos.}\alpha}{f}; \quad (8)$$

équations dans lesquelles il ne s'agira plus que de mettre pour d, e, f, les valeurs données par les équations (6, 7).

Tous les calculs que nous venons d'indiquer, toujours, comme on le voit, d'une parfaite symétrie, n'exigent, en quelque sorte, pour leur exécution, que la simple peine d'écrire. Et d'abord, en comparant aux quarrés des équations (7) les produits deux à deux des équations (6), on obtient

$$(A'k+\text{Cos.}\alpha)^2-(Bk+1)(Ck+1)=0\,,$$

$$(B'k+\text{Cos.}\beta)^2-(Ck+1)(Ak+1)=0\,;$$

$$(C'k+\text{Cos.}\gamma)^2-(Ak+1)(Bk+1)=0\,;$$

ou, en développant et ordonnant

$$\left.\begin{aligned}(A'^2-BC)k^2-(B+C-2A'\text{Cos.}\alpha)k-\text{Sin.}^2\alpha=0\,,\\(B'^2-CA)k^2-(C+A-2B'\text{Cos.}\beta)k-\text{Sin.}^2\beta=0\,,\\(C'^2-AB)k^2-(A+B-2C'\text{Cos.}\gamma)k-\text{Sin.}^2\gamma=0\,.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

En éliminant k entre ces équations, prises successivement deux à deux, on obtiendra trois équations de condition dont chacune sera comportée par les deux autres; et ce sera les équations demandées. En posant, pour abréger,

A'^2

$$A'^2-BC=a\ ,\quad B+C-2A'\text{Cos.}\alpha=a'\ ;$$

$$B'^2-CA=b\ ,\quad C+A-2B'\text{Cos.}\beta=b'\ ;$$

$$C'^2-AB=c\ ,\quad A+B-2C'\text{Cos.}\gamma=c'\ ;$$

on trouvera d'abord

$$k=\frac{a'\text{Sin.}^2\beta-b'\text{Sin.}^2\alpha}{a\text{Sin.}^2\beta-b\text{Sin.}^2\alpha}=-\frac{a\text{Sin.}^2\beta-b\text{Sin.}^2\alpha}{ab'-ba'}\ ;$$

$$k=\frac{b'\text{Sin.}^2\gamma-c'\text{Sin.}^2\beta}{b\text{Sin.}^2\gamma-c\text{Sin.}^2\beta}=-\frac{b\text{Sin.}^2\gamma-c\text{Sin.}^2\beta}{bc'-cb'}\ ;$$

$$k=\frac{c'\text{Sin.}^2\alpha-a'\text{Sin.}^2\gamma}{c\text{Sin.}^2\alpha-a\text{Sin.}^2\gamma}=-\frac{c\text{Sin.}\alpha-a\text{Sin.}^2\gamma}{ca'-ac'}\ .$$

Voilà donc la valeur de k sous six formes différentes ; et nous avons en outre les trois équations de condition

$$(a\text{Sin.}^2\beta-b\text{Sin.}^2\alpha)^2+(ab'-ba')(a'\text{Sin.}^2\beta-b'\text{Sin.}^2\alpha)=0\ ,$$

$$(b\text{Sin.}^2\gamma-c\text{Sin.}^2\beta)^2+(bc'-cb')(b'\text{Sin.}^2\gamma-c'\text{Sin.}^2\beta)=0\ ,$$

$$(c\text{Sin.}^2\alpha-a\text{Sin.}^2\gamma)^2+(ca'-ac')(c'\text{Sin.}^2\alpha-a'\text{Sin.}^2\gamma)=0\ ;$$

Nous aurons encore

$$d=\sqrt{A.\frac{b'\text{Sin.}^2\gamma-c'\text{Sin.}^2\beta}{b\text{Sin.}^2\gamma-c\text{Sin.}^2\beta}}\ ,\quad e=\sqrt{B.\frac{c'\text{Sin.}^2\alpha-a'\text{Sin.}^2\gamma}{c\text{Sin.}^2\alpha-a\text{Sin.}^2\gamma}}\ ,$$

$$f=\sqrt{C.\frac{a'\text{Sin.}^2\beta-b'\text{Sin.}^2\alpha}{a\text{Sin.}^2\beta-b\text{Sin.}^2\alpha}}\ ;$$

ce qui donnera pour la double équation de l'axe de révolution

$$(x+y\text{Cos.}\gamma+z\text{Cos.}\beta)\sqrt{\frac{b\text{Sin.}^2\gamma-c\text{Sin.}^2\beta}{A(b'\text{Sin.}^2\gamma-c'\text{Sin.}\beta)}}=$$

$$(y+z\text{Cos.}\alpha+x\text{Cos.}\gamma)\sqrt{\frac{c\text{Sin.}^2\alpha-a\text{Sin.}^2\gamma}{B(c'\text{Sin.}^2\alpha-a'\text{Sin.}^2\gamma)}}=$$

$$(z+x\text{Cos.}\beta+y\text{Cos.}\alpha)\sqrt{\frac{a\text{Sin.}^2\beta-b\text{Sin.}^2\alpha}{C(a'\text{Sin.}^2\beta-b'\text{Sin.}^2\alpha)}}\ .$$

En combinant entre elles d'une manière convenable les équations de condition, on pourrait sans doute les remplacer par d'autres d'une forme plus simple, et qui permettraient de présenter ces derniers résultats sous une forme entièrement rationnelle.

Lorsque les coordonnées primitives sont rectangulaires, le calcul s'abrège d'une manière notable; on a alors

$$\text{Sin.}\alpha=\text{Sin.}\beta=\text{Sin.}\gamma=1\ ;$$

$$\text{Cos.}\alpha=\text{Cos.}\beta=\text{Cos.}\gamma=0\ .$$

En conséquence, les équations (7) deviennent simplement

$$ef=A'k\ ,\quad fd=B'k\ ,\quad de=C'k\ .$$

En divisant successivement par chacune d'elles le produit des deux autres, il vient

$$d^2=-\frac{B'C'}{A'}k\ ,\quad e^2=-\frac{C'A'}{B'}k\ ,\quad f^2=-\frac{A'B'}{C'}\ ; \qquad (10)$$

valeurs qui, égalées à celles qui résultent des équations (6) donnent

$$(AA'-B'C')k=A'\ ,\quad (BB'-C'A')k=B'\ ,\quad (CC'-A'B')k=C'\ ;$$

d'où, par l'élimination de k,

$$\frac{AA'-B'C'}{A'}=\frac{BB'-C'A'}{B'}=\frac{CC'-A'B'}{C}\ ;$$

et telles seront les équations de condition.

On aura ensuite, par les équations (10)

$$A'^2d^2=B'^2e^2=C'^2f^2=-A'B'C'k\,,$$

d'où

$$A'd=B'e=C'f\;;$$

mais, dans le cas actuel, les équations (8), qui déterminent la direction de l'axe de révolution, sont

$$\frac{x}{d}=\frac{y}{e}=\frac{z}{f}\;;$$

elles deviendront donc, d'après cela,

$$A'x=B'y=C'z\;;$$

résultats conformes à ceux qu'on rencontre aux endroits cités au commencement de cet article.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 348 de ce recueil ;

Par M. J. B. Durrande.



Les théorèmes dont il s'agit ici reviennent, en dernière analise, aux deux suivans :

THÉORÈME I. Soient AB, A′B′, A″B″ *trois droites parallèles quelconques, tracées sur un même plan. Soit* C *le point de concours de* A′A″ *et* B′B″ ; *soit* C′ *le point de concours de* A″A

et B″B ; *soit enfin* C″ *le point de concours de* AA′ *et* BB′ ; *les trois points* C , C′ , C″ *seront en ligne droite.*

THÉORÈME II. Soient ASB , A′S′B′ , A″S″B″ *trois angles ayant les côtés respectivement parallèles , tracés sur un même plan. Soient* M *le point de concours de* S′A′ *et* S″B″ , *et* N *le point de concours de* S′B′ *et* S″A″ ; *soient* M′ *le point de concours de* S″A″ *et* SB , *et* N′ *le point de concours de* S″B″ *et* SA ; *soient enfin* M″ *le point de concours de* SA *et* S′B′ , *et* N″ *le point de concours de* SB *et* S′A′ ; *les trois droites* MN , M′N′ , M″N″ *concourront en un même point.*

C'est sous ce point de vue que nous allons envisager ces deux théorèmes.

I. Soit pris l'axe des x parallèle aux trois droites AB , A′B′ , A″B″ , et soient l'origine et la direction de l'axe des y supposés quelconques. Soient les équations des extrémités de nos trois droites ainsi qu'il suit :

$$\text{Pour A}\begin{cases}x=a\,,\\ y=b\,;\end{cases}\quad \text{Pour A}'\begin{cases}x=a'\,,\\ y=b'\,;\end{cases}\quad \text{Pour A}''\begin{cases}x=a''\,;\\ y=b''\,;\end{cases}$$

$$\text{Pour B}\begin{cases}x=a+l\,,\\ y=b\,;\end{cases}\quad \text{Pour B}'\begin{cases}x=a'+l'\,,\\ y=b'\,;\end{cases}\quad \text{Pour B}''\begin{cases}x=a''+l''\,;\\ y=b''\,.\end{cases}$$

On aura donc pour les équations

$$\text{De AA}'\,,\qquad y-b=\frac{b-b'}{a-a'}(x-a)\,;$$

$$\text{De BB}'\,,\qquad y-b=\frac{b-b'}{(a-a')+(l-l')}(x-a-l)\,;$$

d'où l'on conclura, pour le point C″ de concours de ces deux droites ;

$$x=\frac{a'l-al'}{l-l'}\,, \qquad y=\frac{b'l-bl'}{l-l'}\,;$$

Par une simple permutation d'accens, on trouvera pour le point C de concours de A′A″ et B′B″

$$x=\frac{a''l'-a'l''}{l'-l''}\,, \qquad y=\frac{b''l'-b'l''}{l'-l''}\,;$$

et pour le point C′ de concours de A″A et B″B

$$x=\frac{al''-a''l}{l''-l}\,, \qquad y=\frac{bl''-b''l}{l''-l}\,;$$

Or, puisque l'axe des y est quelconque, on peut toujours supposer qu'on la fait passer par C et C′; on devra avoir alors

$$\frac{a''l'-a'l''}{l'-l''}=0\,, \qquad \frac{al''-a''l}{l''-l}=0\,;$$

ou plus simplement

$$a''l'=a'l''\,; \qquad al''=a''l\,;$$

d'où encore

$$a'l=al'\,;$$

et par conséquent

$$\frac{a'l-al'}{l-l'}=0\,;$$

le point C″ sera donc aussi alors sur l'axe des y; ce point est donc en ligne droite avec les deux autres.

II. Soient pris les axes des coordonnées respectivement parallèles aux côtés des trois angles ASB, A′S′B′, A″S″B″, l'origine étant d'ailleurs quelconque.

Soient alors les équations des sommets S , S′ , S″ ainsi qu'il suit :

$$\text{Pour S}\left\{\begin{array}{l} x=a\ , \\ y=b\ ; \end{array}\right. \quad \text{Pour S}'\left\{\begin{array}{l} x=a'\ , \\ y=b'\ ; \end{array}\right. \quad \text{Pour S}''\left\{\begin{array}{l} x=a''\ ; \\ y=b''\ . \end{array}\right.$$

En conséquence , les équations du point M″, intersection de SA′ et S′B′ et du point N″, intersection de SB et S′A′, seront

$$\text{Pour M}''\left\{\begin{array}{l} x=a'\ ; \\ y=b\ ; \end{array}\right. \quad \text{Pour N}''\left\{\begin{array}{l} x=a\ , \\ y=b'\ ; \end{array}\right.$$

l'équation de M″N″ sera conséquemment

$$y-b=\frac{b-b'}{a'-a}(x-a')\ ;$$

ou encore

$$(b-b')x+(a-a')y+(a'b'-ab)=o\ :$$

Par une simple transposition d'accens , on trouvera ; pour les équations

$$\text{De MN}\ ; \qquad (b'-b'')x+(a'-a'')y+(a''b''-a'b')=o\ ,$$

$$\text{De M}'\text{N}'\ , \qquad (b''-b\ )x+(a''-a\ )y+(a\,b-a''b'')=o\ .$$

Puisque l'origine est quelconque , on peut supposer qu'on l'a placée à l'intersection de ces deux dernières droites , ce qui revient à supposer qu'elles passent toutes deux par cette origine ; on doit avoir alors

$$a''b''=a'b'\ , \qquad ab=a''b''\ ;$$

et par conséquent

$$a'b'=ab\ ;$$

la droite $M''N''$ passe donc aussi alors par l'origine ; elle concourt donc au même point avec les deux autres (*).

(*) Des droites comprises dans un même plan n'étant qu'un cas particulier d'un système de droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, et des droites parallèles, soit sur un plan soit dans l'espace, n'étant également qu'un cas particulier d'un système de droites concourant en un point ; il s'ensuit que le premier de nos deux théorèmes n'est qu'un cas très-particulier du suivant :

THÉORÈME. Soient AB, $A'B'$, $A''B''$, *trois droites situées dans l'espace d'une manière quelconque, en sorte néanmoins que leurs directions concourent en un même point. Si* C *est le point de concours de* $A'A''$ *et* $B'B''$; *que* C' *soit le point de concours de* $A''A$ *et* $B''B$; *et qu'enfin* C'' *soit le point de concours de* AA' *et* BB' ; *les trois points* C, C', C'' *seront situés sur une même ligne droite.*

La vérité de ce théorème s'aperçoit immédiatement en remarquant que AB, $A'B'$, $A''B''$ peuvent être considérés comme les arêtes latérales d'un tronc de pyramide triangulaire, dont alors les deux bases sont $AA'A''$, $BB'B''$; et que, les points C, C', C'' étant ceux où concourent les côtés correspondans de ces deux bases, ces points doivent se trouver sur la commune section de leurs plans, et par conséquent en ligne droite.

Mais on peut aussi supposer que les deux bases $AA'A''$, $BB'B''$ se coupent entre les arêtes latérales ; donc, si D est le point de concours de $A'B''$ et $A''B'$, que D' soit celui de $A''B$ et AB'', et enfin D'' celui de AB' et $A'B$, D' et D'' seront en ligne droite avec C, D'' et D avec C', et D, D' avec C'' ; de sorte que les six points C, C', C'', D, D', D'' seront sur quatre droites, et conséquemment dans un même plan.

Soient présentement quatre droites AB, $A'B'$, $A''B''$, A''', B''', concourant en un même point dans l'espace ; en combinant ces quatre droites deux à deux, comme nous l'avons fait ci-dessus ; c'est-à-dire, en menant AA' et BB', AA'' BB'', $A'A''$ et $B'B''$, AA''' et BB''', $A'A'''$ et $B'B'''$, $A''A'''$ et $B''B'''$; on obtiendra six points de concours, lesquels, devant être situés sur quatre droites, seront conséquemment dans un même plan.

En menant, au contraire, les droites AB' et $A'B$, AB'' et $A''B$, $A'B''$ et $A''B'$, AB''' et $A'''B$, $A'B'''$ et $A'''B'$, $A''B'''$ et $A'''B''$, on obtiendra six nouveaux points qui seront deux à deux en ligne droite avec un des six premiers, ou trois à trois dans un même plan avec trois des six premiers ; de sorte que les douze

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorème d'analise indéterminée.

Un nombre n, plus grand que *deux*, est ou n'est pas premier, suivant que $2^{n-1}-1$ est ou n'est point divisible par n.

Problème de Combinaison.

On a m lettres, parmi lesquelles il se trouve des a en nombre α, des b en nombre β, des c en nombre γ, et ainsi de suite; en sorte qu'on a $\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots=m$. De combien de manières différentes ces m lettres peuvent-elles être disposées circulairement les unes à côté des autres?

points seront sur seize droites, lesquelles seront elles-mêmes situées sur quatre plans.

De ces propriétés, il est facile de déduire celles des centres et des axes de similitude, tant interne qu'externe, des cercles et des sphères, qui ont été établies (tom. VI, pag. 326 et suiv.); il ne s'agit pour cela que de considérer les cordes de contact des cercles ou les plans des lignes de contact des sphères comme des côtés homologues ou comme des plans de faces homologues de polygones ou de polyèdres semblables, inscrits à ces cercles et à ces sphères.

J. D. G.

VARIÉTÉS.

Essai de dialectique rationnelle ;

Par M. GERGONNE.

DANS un ouvrage qui ne porte certainement pas l'empreinte de la timidité des opinions ; l'auteur, qui n'avait jamais fait profession de beaucoup de ménagement pour les doctrines reçues, et qui écrivait d'ailleurs dans des circonstances bien propres à dégager sa pensée de toute contrainte ; CONDORCET, dans son *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain*, s'exprime, au sujet de la *Dialectique* d'ARISTOTE, de la manière suivante :

« Aristote, dans sa logique, réduisant les démonstrations à une » suite d'argumens assujettis à la forme syllogistique, divisant ensuite » toutes les propositions en quatre classes qui les renferment toutes ; » enseigne à reconnaître, parmi toutes les combinaisons possibles » de ces quatre classes, prises trois à trois, celles qui répondent à » des syllogismes concluans, et qui y répondent nécessairement. Par ce » moyen, l'on peut juger de la justesse ou du vice d'un argument, » en sachant seulement à quelle combinaison il appartient ; et l'art » de raisonner juste est soumis, en quelque sorte, à des procédés » techniques ».

» Cette idée ingénieuse est restée inutile jusqu'ici (*) ; mais peut-

(*) Il eût été fort à désirer pour l'esprit humain, qu'elle n'eût été que cela ; mais c'est malheureusement sur elle que s'est élevée, sous le nom pompeux de *Métaphysique*, une vaine et contentieuse science ; une science toute de mots, dans

» être doit-elle un jour devenir le premier pas vers un perfectionnement » que l'art de raisonner et de discuter semble encore attendre ».

A l'époque où Condorcet écrivait ceci, il y avait déjà plus d'un demi-siècle que la dialectique d'Aristote, enseignée pourtant encore dans quelques établissemens gothiques, était tombée, parmi les gens du bon ton, dans le discrédit le plus complet; et le petit nombre des partisans qu'alors elle pouvait encore compter, l'entendaient eux-mêmes assez mal, comme on en peut juger par ce que la plupart en ont écrit.

Mais, par l'effet de l'une des fluctuations si fréquentes dans les opinions des hommes, cette même dialectique a semblé, dans ces derniers temps, avoir repris un peu de faveur; non pas probablement parce que les principes en sont sains, et encore moins sans doute parce que Condorcet en a parlé d'une manière assez favorable; mais apparemment parce qu'elle s'enseignait au bon temps passé, et que, depuis plusieurs années, *Retour aux vieilles doctrines* est le cri de ralliement d'un certain public (*).

Entraîné, dans ces circonstances, à faire des cours de logique dans une école publique, j'ai dû répugner d'autant moins à me prêter au goût qui commençait à se manifester de nouveau en

---

laquelle on a vainement cherché à masquer, sous la sévérité des formes, le vide absolu du fond. Il est, au surplus, fort douteux que la manie d'*Analise des facultés de l'ame* qui, depuis plusieurs années, tourmente certains adeptes en France, doive produire des fruits beaucoup plus précieux. Ils prétendent avoir découvert que *penser c'est sentir*; mais, en admettant même qu'il y ait à quelque chose de plus qu'une extension nouvelle et arbitraire donnée à la signification du mot *sentir*, on ne conçoit pas trop quel parti peut tirer de cette maxime, celui qui se trouve arrêté dans quelque recherche un peu épineuse. Il en est à peu près de nos facultés *intellectuelles* comme de nos facultés *physiques*; elles se perfectionnent beaucoup moins par l'*analise* que par l'*exercice*.

(*) Il y a eu un temps, en France, où il suffisait à une doctrine d'être nouvelle pour être favorablement accueillie : aujourd'hui c'est tout le contraire. On avait certes grand tort alors; mais a-t-on moins tort aujourd'hui?

faveur de la dialectique de nos pères, qu'au fond le plus grave reproche que l'on pourrait lui faire, serait peut-être, comme le dit Condorcet, de n'être qu'une sorte de pierre d'attente dans l'édifice de nos connaissances; et que, dans ce cas même, la recherche de ses règles, pourvu qu'on n'y consommât pas trop de temps et de soins, n'en offrirait pas moins un exercice utile, et un modèle de plus de la méthode à suivre dans la recherche de la vérité.

Mais, en me déterminant à développer ces règles, j'ai dû chercher s'il ne serait pas possible de perfectionner et de compléter d'avantage l'exposition qu'on en fait communément. Une idée mise en avant par Euler, mais de laquelle il paraît n'avoir point tiré tout le parti qu'elle semblait offrir, m'a singulièrement aidé dans mon dessein, et j'en ai fait une des bases principales du petit écrit que l'on va lire. Clarté, rigueur et brièveté : tel est le triple but que j'ai eu constamment en vue, et dont je désirerais bien ne m'être point trop écarté.

Si l'on s'étonnait de rencontrer de telles matières dans un recueil de la nature de celui-ci; j'observerais, pour ma justification, que d'abord les sciences exactes sont, pour ainsi dire, les seules dans lesquelles les procédés de la dialectique rationnelle soient rigoureusement applicables; et qu'ensuite la doctrine que j'expose, et plus encore la forme sous laquelle je la présente, ne saurait guère être bien saisie que par des géomètres, ou du moins par ceux qui possèdent l'esprit géométrique; et voilà apparemment pourquoi la plupart des partisans et des adversaires de cette doctrine la louent ou la dénigrent uniquement sur parole; ce qui, pour le dire en passant, ne me paraît pas extrêmement raisonnable.

Au surplus, ces matières sont aujourd'hui tellement perdues de vue, qu'à défaut de tout autre mérite, l'essai qu'on va lire pourrait presque prétendre à celui de la nouveauté. Si d'ailleurs il n'est point proprement nouveau pour le fond, on le jugera peut-être tel quant à la forme.

§. I.

Des idées et de leur étendue.

1. Avoir l'*idée* d'une chose, c'est en être simplement affecté, soit par l'effet de sa présence effective, soit par le souvenir qu'on en a, soit enfin par un acte de l'imagination. C'est ainsi que j'ai actuellement l'idée de la *plume* qui trace ces lignes, celle de la ville de *Berlin*, celle du *cheval Pégaze*.

2. Les idées sont dites *individuelles* ou particulières, lorsque, comme dans ces exemples, elles ne se rapportent qu'à des individus. Elles sont dites, au contraire, générales ou universelles, lorsqu'elles conviennent, à la fois, à plusieurs objets; et telles sont, par exeemple, les idées de *plume*, de *ville* et de *cheval*. Ces dernières sont aussi appelées *abstraites*, parce que nous les formons en négligeant les différences entre les objets auxquels elles se rapportent, pour ne les envisager uniquement que sous le rapport de ce qu'ils ont de commun.

3. De même que la considération des caractères communs à plusieurs individus donne naissance à une idée abstraite, la considération des caractères communs à plusieurs idées abstraites en fait naître de plus abstraites, lesquelles peuvent, à leur tour, donner naissance à d'autres qui le soient davantage encore, et ainsi indéfiniment. C'est par une suite de pareilles opérations que, par exemple, nous nous élevons progressivement aux notions abstraites de *cérisier*, d'*arbre*, de *végétal*, de *corps* et d'*être*.

4. Dans cette progression de notions abstraites, les plus générales sont dites *contenir* celles qui le sont moins, lesquelles, à l'inverse, sont dites *contenues* dans les premières; c'est de là que naît la notion de l'*étendue* relative de deux idées. Une idée ne peut donc être dite plus étendue qu'une autre qu'autant que cette dernière fait partie de la première. C'est, par exemple, dans ce sens que l'on

peut dire que l'idée de *rose* est moins étendue que celle de *fleur*. Mais, bien que les éléphans soient incomparablement moins nombreux que les mouches, on ne serait pas mieux fondé à dire que l'idée d'*éléphant* est moins étendue que celle de *mouche*, qu'on pourrait l'être à dire que cette dernière idée est moins étendue que la première, parce qu'il n'y a là ni idée *contenue*, ni idée *contenante*.

5. Examinons présentement quelles sont les diverses circonstances dans lesquelles deux idées, comparées l'une à l'autre, peuvent se trouver relativement à leur étendue. Cette question revient évidemment à demander quelles sont les diverses sortes de circonstances dans lesquelles deux figures fermées quelconques, deux cercles, par exemple, tracés sur un même plan, peuvent se trouver l'un par rapport à l'autre; l'étendue de chaque cercle représentant ici celle de chaque idée. Or,

1.° De même que ces deux cercles peuvent être totalement hors l'un de l'autre; il peut se faire aussi que deux idées soient tout-à-fait étrangères l'une à l'autre, sous le rapport de leur étendue; et c'est, par exemple, le cas des idées de *Polonais* et d'*Espagnol*; c'est également le cas des idées de *thermomètre* et de *microscope*. Nous représenterons à l'avenir ce genre de relation par (H). On reconnaît qu'elle a lieu entre deux idées, toutes les fois qu'il est évidemment impossible d'en trouver une troisième qui soit à la fois contenue dans l'une et dans l'autre.

2.° De même que deux cercles peuvent simplement se couper l'un et l'autre; il peut aussi se faire que deux idées se conviennent dans une partie seulement de leur étendue; de sorte que, outre la partie commune, chacune d'elles ait, de plus, une partie étrangère à l'autre; et c'est, par exemple, le cas des idées de *vieillard* et de *médecin*; c'est encore celui des idées de *gentilhomme* et de *savant*. Nous représenterons à l'avenir ce second genre de relation par (X). On reconnaît qu'elle a lieu entre deux idées, toutes les fois que l'on peut d'abord en trouver une troisième, contenue à la fois dans l'une et dans l'autre, et qu'en outre chacune de ces deux idées

peut en contenir quelqu'une qui soit tout à fait étrangère à l'autre

3.° De même que deux cercles peuvent se confondre l'un et l'autre ; il peut se faire aussi que deux idées se conviennent exactement, sous le rapport de leur étendue, auquel cas elles ne pourront différer au plus que par l'expression ; et c'est, par exemple, le cas des idées de *Batave* et de *Hollandais*, c'est encore celui des idées de *Pallas* et de *Minerve*. Nous représenterons à l'avenir ce troisième genre de relation par (I). On reconnaît qu'elle a lieu entre deux idées, lorsqu'il est à la fois impossible qu'une idée contenue dans l'une ne le soit pas aussi dans l'autre, et qu'une idée étrangère à l'une ne le soit pas également à l'autre.

4.° Enfin, de même que deux cercles inégaux peuvent être tellement situés, l'un par rapport à l'autre, que le plus petit soit totalement renfermé dans le plus grand ; deux idées peuvent pareillement être telles que l'une, moins étendue, soit entièrement contenue dans l'autre, qui le sera d'avantage ; et c'est, par exemple, le cas des idées de *Français* et d'*Européen* ; c'est encore celui des idées de *sculpteur* et d'*artiste*. Nous représenterons à l'avenir cette dernière sorte de relation par (C) ou par (Ɔ), suivant des circonstances qui seront expliquées plus loin. On reconnaît qu'elle a lieu entre deux idées lorsque, ne pouvant trouver aucune idée contenue dans la première qui ne le soit en même temps dans la seconde, on peut, au contraire, en trouver qui soient contenues dans celle-ci, sans avoir rien de commun avec l'autre.

6. Et, de même qu'il est impossible de concevoir, entre deux cercles situés sur un même plan, d'autres sortes de situations respectives que celles qui viennent d'être signalées ; il doit être également impossible de concevoir, entre deux idées, d'autres relations d'étendue que celles que nous venons de faire connaître.

7. Nous avons choisi les symboles caractéristiques de ces relations de la manière qui nous a paru la plus propre à bien lier le signe à la chose signifiée ; et c'est une attention qui, toute puérile qu'elle peut sembler d'abord, nous paraît de quelque importance. La lettre

(*H*), initiale du mot *Hors*, désigne le système de deux idées absolument l'une hors de l'autre, comme le sont les deux jambes verticales de cette lettre. Ces deux jambes peuvent être ensuite considérées comme s'étant croisées pour former la lettre (*X*), destinée à rappeler le système de deux idées qui, en effet, se croisent ou se coupent en quelque sorte l'une et l'autre. Ces mêmes jambes peuvent enfin être considérées comme s'étant confondues pour former la lettre (*I*), que nous employons à représenter le système de deux idées qui coïncident exactement l'une avec l'autre; cette lettre est d'ailleurs l'initiale du mot *Identité*, qui est aussi la dénomination qui convient au genre de relation dont il s'agit. On peut remarquer, de plus, que les trois lettres (*H*, *X*, *I*), tout comme les relations qu'elles sont destinées à rappeler, sont symétriques, et conséquemment non susceptibles de changer d'aspect par leur renversement. Mais il n'en est plus ainsi de la lettre (*C*) qui, par son renversement, se change en (Ɔ); aussi avons-nous destiné cette lettre à rappeler une relation dans laquelle les deux idées ne jouent pas le même rôle, une relation qui n'est point réciproque. Cette lettre est d'ailleurs l'initiale commune des deux mots *Contenante* et *Contenue*, qui expriment en effet l'état relatif des deux idées (*).

§. II.

Théorie des propositions.

8. La perception d'un rapport d'étendue entre plusieurs idées, simultanément présentes à la pensée, est ce qu'on appelle un *juge-*

(*) Tout ce qui va suivre étant absolument subordonné à la signification que nous venons d'attacher à chacune de ces lettres; il est essentiel, avant d'aller plus loin, de se la rendre bien familière. Ce doit être une chose très-facile, d'après les explications dans lesquelles nous venons d'entrer.

ment ; et ce jugement, manifesté par des signes sensibles, prend le nom de *proposition*. La proposition est dite *simple*, lorsqu'elle n'est relative qu'à deux idées seulement ; c'est la seule dont il sera question ici.

9. Toute proposition doit, au moins implicitement, présenter trois parties ; savoir : 1.° le *sujet* ou *petit terme*, qui est l'idée que l'on dit être ou n'être pas, en tout ou en partie, contenue dans l'autre ; 2.° l'*attribut* ou *grand terme*, qui est, au contraire, l'idée de laquelle on dit que le sujet fait ou ne fait point partie ; 3.° enfin, la *copule* qui exprime la nature du rapport entre les deux *termes* de la proposition. Nous représenterons constamment à l'avenir le sujet ou petit terme par P, et l'attribut ou grand terme par G ; et nous nous conformerons à l'usage universel des logiciens, qui est d'énoncer ou d'écrire d'abord le sujet, ensuite la copule, puis enfin l'attribut (*).

10. Une proposition est dite *affirmative* ou *négative*, suivant qu'elle énonce que le sujet *est* ou n'*est point* contenu, en tout ou en partie, dans l'attribut. Cette différence entre les propositions détermine ce qu'on appelle leur *qualité*.

11. Une proposition est dite *universelle* ou *particulière*, suivant que le jugement qu'elle énonce se rapporte à *tout* le sujet ou seulement à une *partie indéterminée* de ce sujet. Cette différence entre les propositions détermine ce qu'on appelle leur *quantité*.

12. En ayant donc égard, à la fois, à la quantité et à la qualité, nous aurons à distinguer, en tout, quatre sortes de propositions ; et, comme, dans tout ce qui va suivre, nous aurons continuellement besoin de les mentionner, nous leur affecterons des signes abréviatifs. Voici ces signes, ainsi que les formules générales des propositions qui leur répondent respectivement :

(*) Les dénominations de *grand* et de *petit* termes tirent leur origine de ce que d'*ordinaire* l'attribut a plus d'étendue que le sujet ; je les conserve ici, parce qu'elles me seront utiles.

Proposition

Proposition	Universelle	Affirmative (*A*)	Tout *P* est *G* ;
		Négative... (*N*)	Nul *P* n'est *G* ;
	Particulière	Affirmative (*a*)	Quelque *P* est *G* ;
		Négative... (*n*)	Quelque *P* n'est pas *G*.

Il faudra donc avoir le soin de substituer mentalement aux caractères *A*, *N*, *a*, *n*, lorsque nous les emploîrons, les propositions dont ils sont les symboles abrégés ; en se rappelant bien, 1.° que les grandes lettres (*A*, *N*) désignent des propositions universelles, et les petites (*a*, *n*) des propositions particulières ; 2.° que les (*A*, *a*) désignent des propositions affirmatives et les (*N*, *n*) des propositions négatives (*).

13. La recherche la plus importante à faire, dans la théorie des propositions, est, sans contredit, celle des caractères propres à reconnaître si une proposition donnée est vraie ou fausse. Avant de nous occuper de cette recherche, observons d'abord que, bien que les relations d'étendue entre deux idées que l'on compare ne puissent être (6) qu'au nombre de quatre seulement ; le nombre de ces relations s'élève néanmoins à cinq, lorsque les deux idées sont considérées comme termes de proposition ; la raison en est qu'alors, dans le quatrième cas, *G* peut tantôt contenir *P* et tantôt être contenu en lui. A l'avenir, pour distinguer ces deux cas l'un de l'autre,

(*) A la rigueur, toute proposition affirmative peut, sans changer de sens, être rendue négative et réciproquement ; il ne s'agit pour cela que de substituer à l'attribut un mot qui en soit l'exacte négation, comme on le voit dans cet exemple : *Lagrange est mort ; Lagrange n'est point vivant.* Mais on ne saurait, sans en altérer le sens, rendre particulière une proposition universelle, ni universelle une proposition particulière ; et cela à cause de l'indétermination que doit nécessairement avoir le sujet, dans les propositions particulières.

nous désignerons constamment par (*C*) celui où le sujet ou petit terme *P* sera contenu dans l'attribut ou grand terme *G* ; et nous représenterons au contraire par (*Ɔ*) le cas où ce sera, à l'inverse, le sujet ou petit terme *P* qui contiendra l'attribut ou grand terme *G*.

14. Cette convention ainsi établie, si nous examinons, pour chacun de nos cinq cas, quelles sont celles de nos quatre propositions *A*, *N*, *a*, *n*, qui peuvent être énoncées avec vérité, *P* étant constam-sujet et *G* attribut ; nous pourrons renfermer les résultats de cet examen dans le tableau suivant :

	H	. . . *N* , . . . *n*	
	X	. . . . *a* , *n*	
Cas supposés	*I*	*A* , ... *a* , . .	seules propositions vraies.
	C	*A* , ... *a* , . .	
	Ɔ	. . . . *a* , *n*	

Ce tableau nous apprend que, par exemple, si les deux termes sont dans le cas (*C*), c'est-à-dire, si l'attribut *G* contient le sujet *P*, on pourra dire certainement et uniquement

(*A*) . . . . Tout *P* est *G*,

(*a*) . . . . Quelque *P* est *G* (*) :

(*) Il est essentiel de remarquer qu'en logique une proposition particulière est admise, lors même que la proposition universelle entre les mêmes termes est vraie. Ainsi, par exemple, la proposition *Quelques* HOMMES *sont* MORTELS ; qui, dans le discours ordinaire, semblerait inepte, est néanmoins reçue en logique.

15. Nous pouvons ensuite ordonner, au contraire, ce tableau par rapport aux quatre sortes de propositions, ce qui donnera celui qu'on voit ici :

Propositions vraies	A	. . . . . I , C , . .	seuls cas possibles.
	N	H , ...	
	a	. . . X , I , C , $\mathfrak{I}$	
	n	H , X , ... $\mathfrak{I}$	

Ce tableau résout la question inverse de la précédente ; il montre, par exemple, que, si la proposition

(n) . . . . Quelque P n'est pas G,

est vraie, tout ce qu'on pourra certainement en conclure, c'est que ses deux termes se trouvent nécessairement et uniquement dans quelqu'un des trois cas H, X, $\mathfrak{I}$; c'est-à-dire, qu'ils sont tout-à-fait étrangers l'un à l'autre ; ou qu'ils ont seulement une partie de leur étendue qui leur est commune, ou bien encore que G est entièrement contenu dans P ; mais ils ne peuvent se trouver dans aucun des deux cas I, C ; c'est-à-dire qu'ils ne pourront se confondre, et que G ne pourra contenir P. Ce serait l'inverse, si cette même proposition était connue comme fausse (*).

16. Les divers cas qui répondent à chaque sorte de proposition présentent, au surplus, un caractère commun et exclusif, aussi aisé à apercevoir qu'utile à signaler ; on voit, en effet,

(*) Il n'est aucune langue connue dans laquelle une proposition exprime précisément et exclusivement dans lequel de nos cinq cas se trouvent les deux termes qui la composent ; une telle langue, si elle existait, serait bien plus précise que les nôtres ; elle aurait cinq sortes de propositions ; et sa dialectique serait toute différente de celle de nos langues.

1.° Que le caractère commun est exclusif des deux cas *I*, *C*, qui seuls répondent à la proposition (*A*), est que le *sujet* n'a aucune partie de son étendue hors de l'étendue de l'*attribut*;

2.° Que le caractère exclusif du cas *H*, qui seul répond à la proposition (*N*), est que les *deux termes* n'ont aucune portion de leur étendue qui leur soit commune;

3.° Que le caractère commun et exclusif des quatre cas *X*, *I*, *C*, *ɔ*, qui seuls répondent à la proposition (*a*), est que les *deux termes* ont au moins une partie de leur étendue qui leur est commune;

4.° Qu'enfin le caractère commun et exclusif des trois cas *H*, *X*, *ɔ*, qui seuls répondent à la proposition (*n*), est que le *sujet* a au moins une partie de son étendue hors de l'étendue de l'*attribut* (*).

17. De là résultent évidemment les théorèmes que voici :

I. Pour qu'une proposition universelle affirmative *soit vraie*, *il est nécessaire et il suffit que le* sujet *n'ait aucune partie de son étendue hors de l'étendue de l'*attribut.

II. Pour qu'une proposition universelle négative *soit vraie*, *il est nécessaire et il suffit que ses* deux termes *n'aient aucune partie de leur étendue qui leur soit commune.*

III. Pour qu'une proposition particulière affirmative *soit vraie*, *il est nécessaire et il suffit que ses* deux termes *aient au moins une partie de leur étendue qui leur soit commune.*

IV. Enfin, pour qu'une proposition particulière négative *soit vraie*, *il est nécessaire et il suffit que le* sujet *ait au moins une partie de son étendue hors de l'étendue de l'*attribut.

(*) Tout ce qui précède deviendra d'une évidence manifeste si, à la manière d'Euler, on prend la peine de tracer les systèmes de cercles qui répondent aux cinq cas, en marquant, dans chaque système l'un des cercles d'un *P* et l'autre d'un *G*.

Il est évident que ces quatre théorèmes donnent en même temps les caractères de *fausseté* des propositions (*).

18. Le sujet et l'attribut étant les mêmes dans deux propositions ;

1.° Si elles diffèrent à la fois en quantité et en qualité, comme (A, n) ou (N, a), elles sont dites *Contradictoires*.

2.° Si elles diffèrent uniquement en qualité, ou elles sont universelles, comme (A, N), auquel cas elles sont dites *contraires* ; ou bien elles sont particulières, comme (a, n), et alors elles sont appelées *sub-contraires*.

3.° Enfin, lorsqu'elles diffèrent uniquement en quantité, comme (A, a) ou (N, n), les particulières sont dites *subalternes* des universelles.

19. Or, en consultant toujours notre tableau du n.° 15, on voit sur-le-champ, 1.° que deux propositions contradictoires embrassent ensemble tous les cas, sans en avoir aucun qui leur soit

---

(*) On demandera sans doute comment il arrive que, tandis que la vérité et la fausseté des propositions semblent si faciles à reconnaître, les hommes sont néanmoins si peu d'accord sur un grand nombre d'entre elles ? En écartant même ce que l'intérêt, l'ignorance et les passions diverses peuvent exercer d'influence sur nos jugemens ; on peut, je crois, assigner à ce phénomène deux causes principales : la première est que, par paresse ou par précipitation, nous formons souvent des jugemens sur des idées que nous n'avons pas pris le soin de bien circonscrire : la seconde consiste en ce que, très-fréquemment, nous attachons différens noms aux mêmes idées, ou le même nom à des idées différentes ; d'où il résulte que, d'un côté, une même proposition n'a point le même sens pour tout le monde, et que d'un autre, deux propositions, très-différentes, quant à l'expression, peuvent, à l'inverse, signifier la même chose, dans la pensée de ceux qui les énoncent.

Aucun de ces inconvéniens ne se rencontre dans les sciences mathématiques ; et voilà pourquoi elles ont été jusqu'ici les seules *sciences exactes*. Pour que les autres sciences devinssent telles, il faudrait donc qu'à l'exemple de celles-là, elles fixassent, d'une manière précise, par des définitions, le sens des mots qu'elles emploient. Mais cela est-il généralement possible ? Il est, je crois, permis d'en douter.

commun ; 2.° que deux propositions contraires n'ont également aucun cas qui leur soit commun, mais ne les embrassent pas tous ; 3.° qu'à l'inverse, deux propositions sub-contraires, non seulement embrassent tous les cas, mais en ont de plus qui leur sont communs ; 4.° qu'enfin la subalterne d'une proposition embrasse les mêmes cas qu'elle, mais en a d'autres en outre qui lui sont particuliers.

20. De tout cela résultent évidemment les théorèmes que voici :

I. Deux propositions *contradictoires* ne sauraient être ni en même temps vraies ni en même temps fausses ; de sorte que de la vérité de l'une quelconque résulte inévitablement la fausseté de l'autre, tout comme de la fausseté de l'une quelconque résulte nécessairement la vérité de l'autre.

II. Deux propositions *contraires* ne sauraient être vraies en même temps, mais elles peuvent fort bien être fausses l'une et l'autre. Ainsi, la vérité de l'une quelconque entraîne bien inévitablement la fausseté de l'autre ; mais la fausseté de l'une quelconque n'entraîne pas nécessairement la vérité de l'autre.

III. Deux propositions *sub-contraires* ne sauraient être fausses en même temps, mais elles peuvent fort bien être vraies l'une et l'autre. Ainsi, la fausseté de l'une quelconque entraîne bien inévitablement la vérité de l'autre ; mais la vérité de l'une quelconque n'entraîne pas nécessairement la fausseté de l'autre.

IV. Enfin, lorsque deux propositions sont *subalternes* l'une de l'autre, la vérité de la proposition universelle entraîne bien celle de la proposition particulière, tout comme la fausseté de celle-ci entraîne aussi la fausseté de l'autre ; mais la fausseté de la proposition universelle n'entraîne pas celle de la proposition particulière, tout comme la vérité de celle-ci n'entraîne pas celle de l'autre.

21. On appelle *inverse* ou *réciproque* d'une proposition une autre proposition, de mêmes quantité et qualité, entre les mêmes termes, ne différant uniquement de celle-là qu'en ce que le sujet y a pris la place de l'attribut et l'attribut celle du sujet ; d'où il suit que, lorsqu'une proposition est réciproque d'une autre, celle-ci est, à son

tour, réciproque de la première ; c'est-à-dire, en d'autres termes, que la réciproque de la réciproque d'une proposition est cette proposition elle-même.

22. On appelle *converse* d'une proposition une autre proposition dans laquelle l'attribut de la première est devenu sujet et son sujet attribut ; mais qui a en outre la quantité et la qualité réquises pour être une conséquence nécessaire de cette première proposition.

23. La converse d'une proposition en est dite la *converse simple*, lorsqu'elle en est en même temps la réciproque, c'est-à-dire, lorsqu'elle n'en diffère uniquement que par la transposition des termes ; dans le cas contraire, elle en est dite la *converse par accident*.

24. On peut, à ce sujet, se proposer la question suivante : une proposition étant donnée, découvrir si elle a quelques converses, et quelles elles peuvent être ? C'est l'art de résoudre cette question qui est appelé, en logique, *conversation des propositions*, dont il nous reste présentement à découvrir les règles.

25. Nous avons ici deux classes distinctes de propositions à comparer ; dans celles de la première, P est constamment sujet et G attribut ; nous continuerons à les représenter par les caractères (A, N, a, n) : dans celles de la seconde, au contraire, G devient sujet et P attribut ; puis donc que les termes y sont renversés, il se présente naturellement de leur affecter les mêmes caractères renversés ; c'est-à-dire, $(\forall, \text{И}, \text{ɐ}, u)$.

26. Cela posé, en continuant de représenter constamment par (C) le cas où G contient P, et par (Ɔ) celui où, au contraire, c'est P qui contient G ; formons, pour les propositions $(\forall, \text{И}, \text{ɐ}, u)$, un tableau semblable à celui que nous avons formé (15), pour les propositions (A, N, a, n), et plaçons ce second tableau en regard du premier, ainsi qu'il suit :

A	. . . . . . *I*, *C* . .
N	*H* . . . .
a	. . . *X*, *I*, *C*, Ɔ
n	*H*, *X*, ... Ɔ

V	. . . . . . *I*, . . Ɔ
N	*H*, ...
v	. . . *X*, *I*, *C*, Ɔ
u	*H*, *X*, . . *C* . .

27. Or, en comparant ces deux tableaux, on voit aisément, 1.° que les cas (*I*, *C*), qui répondent à *A* dans le premier, ne se trouvent tous deux que vis-à-vis de *v* dans le second; 2.° que le cas (*H*), qui répond à *N* dans le premier, se trouve à la fois vis-à-vis de *N* et *u* dans le second; que les cas (*X*, *I*, *C*, Ɔ), qui répondent à *a* dans le premier, ne se trouvent répondre tous quatre qu'à *v* dans le second; 4.° qu'enfin les cas (*H*, *X*, Ɔ), qui répondent à *n* dans le premier, ne se trouvent répondre tous trois à aucune proposition du second.

28. De là résultent évidemment les règles de conversion que voici :

I. La proposition *universelle affirmative* a *une* converse unique *particulière affirmative*.

II. La proposition *universelle négative* a *deux* converses, l'une *universelle négative* et l'autre *particulière négative* (*).

III. La proposition *particulière affirmative*, a *une* converse unique *particulière affirmative*.

IV. La proposition *particulière négative* n'a *point* de converse (**).

(*) Les logiciens ne tiennent compte que de la première de ces deux converses, en se fondant sur ce que l'autre s'y trouve implicitement contenue, comme subalterne. Cela est vrai; mais, suivant la définition, *u* est, tout aussi bien que *N*, converse de *N*.

(**) Quelques logiciens donnent à *n* une converse qu'ils appellent *converse par contra-position*; mais il résulte clairement de notre analise que cette prétendue converse n'existe pas.

29.

29. On voit donc, 1.° que la proposition *universelle négative* et la proposition *particulière affirmative* sont seules susceptibles de *conversion simple*; 2.° qu'en outre, toute proposition *universelle*, soit *affirmative* soit *négative*, est susceptible de *conversion par accident*, laquelle s'opère en changeant sa quantité.

30. Il suit de là que les propositions *universelles négatives* et *particulières affirmatives* ont seules leurs *réciproques* pour *converses*; ce sont donc aussi les seules de la vérité desquelles on puisse conclure avec certitude celle de leur réciproque. Et, comme les réciproques de ces réciproques sont les propositions même dont il s'agit, il s'ensuit qu'une proposition et sa converse simple sont deux propositions tout-à-fait équivalentes, ne disant absolument ni plus ni moins l'une que l'autre, et pouvant toujours conséquemment, sans aucune sorte d'inconvénient, être substituées l'une à l'autre dans le raisonnement.

31. On voit enfin qu'il n'est utile de bien discerner ce qui est sujet et ce qui est attribut, et de ne point prendre l'un pour l'autre, que dans les seules propositions *universelles affirmatives* et *particulières négatives*. Ce sont donc aussi les seules dont la vérité n'entraine pas nécessairement celle de leurs réciproques, et dont conséquemment les réciproques ne doivent être admises qu'autant qu'on les a prouvées commes ces propositions elles-mêmes.

32. Les principes que nous venons d'établir (20, 28) peuvent souvent trouver d'utiles applications dans la recherche de la vérité. Nous ne saurions, en effet, à raison des bornes étroites de notre intelligence, nous promettre de parvenir toujours facilement à nous assurer, d'une manière directe, de la vérité ou de la fausseté d'une proposition donnée; tandis qu'à l'aide de ces principes, il pourra souvent nous être permis de substituer à la proposition à examiner quelque autre proposition d'un abord plus facile, et dont la vérité ou la fausseté, une fois reconnue, nous mettra en état de prononcer, en toute confiance, sur la vérité ou sur la fausseté de la première.

33. Ainsi, par exemple, pour prouver que A est fausse, il suffira

de prouver que N ou N est vraie, ou bien que a ou v est fausse; et, pour prouver que a est vraie, on pourra se contenter de prouver que A, $\forall$ ou v est vraie, ou bien que N, N, n ou u est fausse. Il ne serait pas difficile de dresser un tableau complet de ces diverses sortes de relations; et c'est pour cela que nous croyons devoir en laisser le soin au lecteur.

§. III.

Théorie du syllogisme.

34. Il est peu de propositions dont la vérité ou la fausseté puisse être immédiatement aperçue d'une manière certaine; et, le plus souvent, les idées qu'une proposition a pour but de comparer n'ont pas entre elles une liaison assez prochaine, un rapport assez apparent, pour qu'il nous soit permis de saisir nettement, d'une première vue, la convenance ou la disconvenance qui existe entre elles.

35. L'artifice qu'on emploie, pour vaincre cette difficulté, consiste à insérer, entre les deux idées que l'on a dessein de comparer, un nombre plus ou moins grand d'idées intermédiaires, dont les relations, tant entre elles qu'avec les idées extrêmes, soient plus facilement perceptibles, et mettent ainsi mieux en évidence la convenance ou la disconvenance entre celles-ci (*).

36. Mais, de même qu'un calcul, entre un grand nombre d'élémens, peut toujours être décomposé en une suite d'autres calculs tels que, dans chacun d'eux, deux élémens seulement doivent con-

---

(*) Condillac, dans une note de sa *Logique* (1.re partie, chap. VII), tente de jeter du ridicule sur cette méthode. Il serait pourtant difficile d'en imaginer d'autres. C'est, en particulier, celle des géomètres qui, depuis vingt siècles qu'ils l'emploient, ont fait, par son moyen, un assez bon nombre de découvertes; et dont les erreurs, durant ce long intervalle, peuvent facilement être comptées.

courir à former un résultat, qui doit, à son tour, entrer comme élément dans quelqu'un des calculs subséquens; on sent que pareillement, dans le sujet qui nous occupe présentement, tout se réduit à savoir assigner une relation d'abord inconnue entre deux idées, au moyen de leurs relations connues avec une troisième. C'est-à-dire, en d'autres termes, qu'il s'agit de savoir déduire de deux propositions, qui ont un terme commun, une troisième proposition entre leurs termes non communs.

37. Le système de trois pareilles propositions forme ce qu'on appelle un *syllogisme*. Les deux propositions données sont dites les *prémisses* du syllogisme, et celle qu'on en déduit en est appelée la *conclusion*. Dans le *syllogisme simple*, le seul dont il sera question ici, les prémisses et la conclusion sont toutes trois des propositions simples; ce syllogisme ne renferme donc que trois termes, répétés chacun deux fois, et tellement répartis que deux quelconques des trois propositions ont toujours un terme commun, lequel ne paraît point dans la troisième.

38. Le sujet ou petit terme de la conclusion d'un syllogisme est dit aussi le *petit terme* du syllogisme; son attribut ou grand terme est pareillement appelé le *grand terme* du syllogisme; et ces deux termes en sont dits, d'un nom commun, les *termes extrêmes*; enfin, le terme commun aux deux prémisses, lequel conséquemment est étranger à la conclusion, est dit le *moyen terme* du syllogisme. Nous continuerons de désigner respectivement par G et P le grand et le petit terme d'un syllogisme, et son moyen terme sera représenté par M.

39. On voit donc que, des deux prémisses d'un syllogisme, l'une contient le grand et le moyen termes; et c'est celle-là qu'on appelle la *majeure* du syllogisme. L'autre, qui contient le moyen et le petit termes, en est dite la *mineure*. Nous nous conformerons ici à l'usage constant des logiciens, qui est d'écrire et d'énoncer d'abord la majeure, ensuite la mineure, et enfin la conclusion. Pour faire sentir la liaison entre ces trois propositions, il est d'usage de faire res-

pectivement précéder la mineure et la conclusion des conjonctions *or* et *donc*.

40. La quantité et la qualité des propositions qui composent un syllogisme en constituent ce qu'on appelle le *mode ;* de sorte que, pour que deux syllogismes puissent être dits de même mode, il est nécessaire et il suffit que la majeure, la mineure et la conclusion de l'un soient respectivement de mêmes quantité et qualité que la majeure, la mineure et la conclusion de l'autre.

41. La manière dont le moyen terme d'un syllogisme se trouve disposé dans ses deux prémisses en constitue ce qu'on appelle la *figure* ; de sorte que, pour que deux syllogismes puissent être dits appartenir à la même figure, il est nécessaire et il suffit que, dans la majeure et dans la mineure de l'un, le moyen terme soit respectivement aux mêmes places qu'il occupe dans la majeure et dans la mineure de l'autre. Nous nous conformerons ici à l'usage presque universel des logiciens qui est d'appeler

Première figure, celle où le moyen terme, sujet dans la majeure, est attribut dans la mineure ;

Deuxième figure, celle où le moyen terme, attribut dans la majeure, est sujet dans la mineure ;

Toisième figure, celle où le moyen terme est attribut dans les deux prémisses ;

Quatrième figure, celle où ce moyen terme est à la fois sujet dans l'une et dans l'autre (*).

42. Puisqu'un syllogisme est formé de trois propositions, dont chacune peut être de quatre sortes différentes ; il s'ensuit que, si tous les modes syllogistiques pouvaient être admis, leur nombre

---

(*) Aristote et ses commentateurs, considérant la seconde figure comme un simple renversement de la première, n'en admettaient que *trois* seulement ; mais il paraît beaucoup plus exact et plus régulier d'en admettre *quatre*, avec Galien, Port-royal, 'S Gravesande, Euler, etc.

s'élèverait à $4^3=64$; et, puisqu'à chaque mode peuvent répondre quatre figures différentes, le nombre total des formes syllogistiques s'élèverait ainsi à $64\times4=256$. Mais nous verrons bientôt que le nombre des formes vraiment concluantes est incomparablement moindre.

43. Nous continuerons, à l'avenir, de représenter par quelqu'une des quatre lettres (A, N, a, n) soit la conclusion d'un syllogisme, soit la majeure, lorsqu'elle aura pour attribut ou grand terme le grand terme du syllogisme, soit enfin la mineure, lorsqu'elle aura pour sujet ou petit terme le petit terme du syllogisme. Nous emploirons, au contraire, quelqu'une des lettres (V, N, v, u) pour désigner, soit la majeure, lorsqu'elle aura pour sujet ou petit terme le grand terme du syllogisme, soit la mineure, lorsqu'elle aura pour attribut ou grand terme le petit terme du syllogisme.

44. Au moyen de cette convention, rien ne sera plus facile que de représenter, d'une manière aussi abrégée qu'expressive, un syllogisme quelconque, concluant ou non ; il suffira pour cela d'écrire de suite, les unes à côté des autres, et dans leur ordre, de gauche à droite, les lettres qui représentent respectivement la majeure, la mineure et la conclusion. Ainsi, par exemple, le syllogisme que voici :

Nul G n'est M ; . . . . (N)
Or, tout P est M ; . . . . (A)
Donc, quelque P n'est pas G. . . . . (n)

sera représenté par le symbole NAn. On voit, d'après cela, que la troisième lettre ne sera jamais renversée ; qu'il en sera de même des deux premières, dans la première figure ; qu'elles le seront toutes deux, dans la seconde ; que la première le sera seule, dans la troisième ; et qu'enfin ce sera, au contraire, la seconde qui le sera dans la quatrième. On voit qu'à l'inverse, trois de nos huit carac-

tères, écrits de suite, exprimeront toujours un syllogisme; concluant ou non, pourvu toutefois que le dernier ne soit point une lettre renversée.

45. Les cinq caractères *H*, *X*, *I*, *C*, *Ɔ*, continueront d'ailleurs à indiquer les relations d'étendue entre deux quelconques des trois termes d'un syllogisme; et toutes les conventions faites jusqu'ici, à l'égard de ces signes, continueront d'avoir lieu, lorsque les termes comparés seront les termes extrêmes, c'est-à-dire, les termes *P* et *G* de la conclusion. Mais nous emploîrons le caractère *C* pour exprimer, soit que le grand terme *G* contient le moyen *M*, soit pour exprimer que ce dernier contient le petit *P*; tandis que nous emploîrons au contraire le caractère *Ɔ* pour exprimer que le petit terme *P* contient le moyen *M*, ou que ce dernier contient le grand *G*.

46. Nous convenons enfin que trois de ces cinq lettres, écrites consécutivement, indiqueront l'état relatif des trois termes d'un syllogisme, pris deux à deux; le premier de ces caractères indiquant la relation entre le grand et le moyen termes, c'est-à-dire, entre les deux termes de la majeure; le second indiquant la relation entre le moyen et le petit termes, c'est-à-dire, entre les deux termes de la mineure; et enfin le troisième indiquant la relation entre le grand et le petit termes, c'est-à-dire, entre les deux termes de la conclusion. Ainsi, par exemple, le symbole *CHX* signifiera que le grand terme contient le moyen, que celui-ci est tout-à-fait étranger au petit, et que ce dernier a une partie commune avec le grand.

47. Avant d'aller plus loin, il est essentiel de remarquer que, dans la théorie qui nous occupe présentement, on ne doit aucunement s'occuper de la vérité ou de la fausseté effectives des propositions dont les syllogismes se composent, mais simplement de la liaison de la conclusion avec les prémisses. Ainsi, un syllogisme formé de trois propositions d'une fausseté manifeste sera réputé exact, si, les prémisses étant admises comme vraies, la conclusion s'ensuit inévitablement; tandis qu'au contraire le défaut de cette liaison, entre la conclusion et les prémisses, rendra vicieux un syllogisme même

composé de trois propositions évidentes. En un mot, le but final de la théorie du syllogisme est la résolution de la question suivante : *Deux propositions qui ont un terme commun étant supposées vraies, et aucune autre notion que celles qu'elles peuvent fournir n'étant supposée acquise sur l'étendue relative des trois termes dont ces propositions se composent ; découvrir s'il en résulte nécessairement quelque proposition entre leurs termes non communs, et quelle est cette proposition ?* Telle est donc aussi la question qui doit présentement nous occuper (*).

48. Notre premier soin, dans cette recherche, doit être d'examiner scrupuleusement les différens cas dans lesquels peuvent se trouver, les uns par rapport aux autres, sous le rapport de leur étendue, les trois termes dont un syllogisme se compose. Cette question revient évidemment à demander de combien de manières trois figures fermées quelconques, trois cercles par exemple, désignés par G, M, P, peuvent être disposés, les uns par rapport aux autres, sur un même plan ; et le moyen le plus propre à le découvrir est de placer d'abord deux d'entre eux, G et P par exemple, dans chacune des cinq situations que nous savons déjà (6) être les

(*) On répète sans cesse, qu'*il ne faut raisonner que sur des objets dont on a une idée bien nette* ; et cependant rien n'est souvent plus faux. On raisonne en effet, avec des mots, tout comme en algèbre on calcule avec des lettres ; et, de même qu'on peut exécuter avec exactitude un calcul algébrique, sans se douter seulement de la signification des symboles sur lesquels on opère, on peut pareillement suivre un raisonnement, sans connaître aucunement la signification des termes dans lesquels il est exprimé, ou sans y songer aucunement, si on la connaît. Et, pour ne pas anticiper sur ce qu'il nous reste encore à dire, il est évident, par exemple, qu'il n'est point nécessaire de connaître la nature des termes d'une proposition, pour en déduire sa converse ou sa subalterne, lorsqu'elle en admet une. Il est sans doute indispensable de bien connaître des idées sur lesquelles on veut immédiatement former quelque jugement ; mais cela n'est point nécessaire pour conclure un jugement de plusieurs autres, que l'on sait d'ailleurs être exacts.

seules possibles ; et d'examiner ensuite successivement ; pour chacune d'elles, les diverses situations que peut avoir, par rapport à ces deux cercles, un troisième cercle *M*. Afin de n'omettre aucun cas, on fera bien de consulter le tableau suivant, dressé à l'avance, et dans lequel la première lettre de chaque assemblage désigne la relation de *M* avec *G*, tandis que la seconde désigne la relation de *M* avec *P* :

HH, *HX*, *HI*, *HC*, *HƆ*,

XH, *XX*, *XI*, *XC*, *XƆ*,

IH, *IX*, *II*, *IC*, *IƆ*,

CH, *CX*, *CI*, *CC*, *CƆ*;

ƆH, *ƆX*, *ƆI*, *ƆC*, *ƆƆ*;

sur quoi il est essentiel d'observer que, suivant la relation supposée entre *G* et *P*, il y aura tels systèmes de relation de *M* avec *G* et *P*, compris dans ce tableau, qui ne seront point réalisables, et qu'il faudra conséquemment rejeter. Ainsi, par exemple, si la relation entre *G* et *P* est *X*, c'est-à-dire, si ces deux idées ont simplement une partie de leur étendue qui leur soit commune, et que chacune d'elles ait d'ailleurs une partie de son étendue étrangère à l'autre, il sera impossible que *M* soit hors de l'une et contienne l'autre ; de sorte qu'à *X* on ne pourra accoler aucune des deux combinaisons *HC* et *ƆH*.

49. Avec ces attentions, on parviendra, sans aucune peine, à remplir le tableau suivant, qui présente le résultat de notre recherche :

Relat.

Relat. de *M* avec *G* et *P*.			Relat. entre *G* et *P*.
	HH, HX, HI, HC, HƆ, XH, XX, XC, IH, CH, ƆH, ƆX; ƆC; . . .	*H*	
	HH, HX, HƆ, XH, XX, XI, XC, XƆ, IX, CH, CX, CƆ, ƆX, ƆC;	*X*	
	HH, XX, II, CƆ, ƆC;	*I*	
	HH, XH, XX, XC, IC, CH, CX, CI, CC, CƆ, ƆC;	*C*	
	HH, HX, HƆ, XX, XƆ, IƆ, CƆ, ƆX, ƆI, ƆC, ƆƆ;	*Ɔ*	

Dans ce tableau, chacune des lettres écrites après le trait vertical à droite est censée écrite à la droite de chacune des combinaisons de deux lettres qui se trouvent à gauche, sur la même ligne qu'elle. On voit donc que le nombre total des cas s'élève à *cinquante-quatre*.

50. On voit d'après cela que, puisque, par exemple, la combinaison *HƆX* fait partie de ce tableau, il est possible que, le grand et le moyen termes étant absolument étrangers l'un et l'autre, le moyen soit entièrement contenu dans le petit, et que ce dernier ait seulement une partie commune avec le grand; mais, comme la combinaison *XƆH* en est exclue, on en doit conclure qu'il est impossible que, le moyen terme n'ayant qu'une partie commune avec le grand et étant contenu dans le petit, ce dernier soit tout-à-fait étranger au grand.

51. Ce même tableau suffirait, à la rigueur, pour nous faire découvrir, dans tous les cas, si deux prémisses données admettent ou n'admettent point de conclusion, et pour nous apprendre en même temps, dans la première de ces deux hypothèses, quelles sont les sortes de conclusions qu'elles peuvent admettre. Soit, par exemple, le système des prémisses *VN*; on sait (26) que la majeure *V* peut répondre, et ne peut répondre uniquement qu'aux seuls cas *I*, *Ɔ*, et que la mineure *N* répond et ne peut répondre qu'au seul cas *H*; d'où il résulte que, dans la supposition présente, le système de relations de *M* avec *G* et *P* ne peut être que *IG* ou *ƆH*:

or, le tableau (49) prouve que, dans l'une et l'autre hypothèses, la relation entre *G* et *P* peut être et ne peut être que *H*; d'où il suit (26) qu'on peut conclure certainement et uniquement *N* ou *n*; ce qui donne les deux syllogismes concluans V_NN, V_Nn; c'est-à-dire, en développant,

Tout *G* est *M*;	Tout *G* est *M*;
Or, nul *M* n'est *P*;	Or, nul *M* n'est *P*;
Donc, nul *P* n'est *G*.	Donc, quelque *P* n'est pas *G*.

52. Si, au contraire, on donne le système de prémisses A_N; la majeure *A* annoncera (26) que *G* et *M* ne peuvent se trouver, l'un par rapport à l'autre, que dans l'un des cas *I*, *C*; et la mineure *N* fera connaître que la relation entre *M* et *P* ne peut être que *H*; de sorte que les systèmes de relation de *M* avec *G* et *P* pourront être indistinctement et uniquement *IH* ou *CH*; or (49), on voit que, si ce système était *IH*, la relation entre *G* et *P* ne pourrait être que *H*; mais que, si, au contraire, ce système était *CH*, cette relation pourrait être indistinctement *H*, *X* ou *C*; tout ce que nous apprend donc l'existence de prémisses A_N, c'est que la relation entre *G* et *P* peut être indistinctement et uniquement *H*, *X* ou *C*; or, il n'en faut pas davantage pour voir qu'il ne peut y avoir ici aucune conclusion certaine; car, si la relation était *H*, on ne pourrait conclure ni *A* ni *a*; et, si, au contraire, cette relation était *C*, la conclusion ne pourrait être ni *N* ni *n*; ainsi, la combinaison A_N ne peut former les prémisses d'aucun syllogisme concluant; c'est-à-dire, en d'autres termes, que des deux propositions

Tout *M* est *G*;
Nul *M* n'est *P*;

on ne saurait conclure certainement aucune proposition dont P soit le sujet et G l'attribut.

53. On pourrait se conduire de la même manière dans tous les cas, et conséquemment notre tâche se terminerait ici, si nous n'avions le dessein de former, une fois pour toutes, le tableau complet de tous les syllogismes concluans (*) A la vérité, nous pourrions procéder de la même manière à leur recherche; mais on sent que, le nombre total des systèmes de prémisses possibles s'élevant à 64, il serait beaucoup trop long de les soumettre tous successivement à une semblable discussion; tâchons donc de parvenir à notre but par une marche un peu plus rapide.

54. La conclusion d'un syllogisme ne peut être que A, N, a n. Or,

1.° Pour que cette conclusion soit A, il est nécessaire et il suffit (26) que G et P ne se trouvent uniquement que dans l'un ou l'autre des deux cas I et C; donc les relations de M avec G et P ne peuvent être alors que celles qui, dans le tableau (49), se trouvent répondre à l'un ou à l'autre des cas I, C, de la dernière colonne, ou même à tous les deux, sans répondre à aucun des autres cas H, X, $\mathcal{D}$, de cette même colonne.

2.° Un raisonnement semblable prouvera que, pour une conclusion N, les systèmes de relation de M avec G et P ne peuvent être que quelques-uns de ceux qui répondent à H, sans répondre à aucun des quatre autres cas X, I, C, $\mathcal{D}$ de la dernière colonne du même tableau.

3.° Pareillement, les systèmes de relation de M avec G et P qui pourront donner lieu à la conclusion a seront ceux-là seulement

---

(*) On ne doit jamais perdre de vue que le comble de la perfection des méthodes est de nous mettre en mains les moyens de parvenir mécaniquement, et sans le secours d'aucune sorte de raisonnement, au but que nous nous proposons d'atteindre.

qui se trouveront répondre à quelqu'un des cas *X*, *I*, *C*, *Ɔ* de la dernière colonne, sans répondre au cas *H* de cette colonne.

4.° Enfin, les systèmes de relations de *M* avec *G* et *P* qui pourront donner lieu à la conclusion *n* seront ceux-là seulement qui se trouveront répondre à quelqu'un des cas *H*, *X*, *Ɔ* de la dernière colonne, sans répondre à aucun des cas *I*, *C* de cette même colonne.

55. A l'aide de ces observations, rien ne sera plus aisé que de conclure de notre tableau (49) le tableau suivant :

Relat. de *M* avec *G* et *P*.		Conclusions.
	II, *IC*, *CI*, *CC* ;	*A*
	HI, *HC*, *IH*, *CH* ;	*N*
	XI, *XƆ*, *IX*, *II*, *IC*, *IƆ*, *CX*, *CI*, *CC*, *CƆ*, *ƆI*, *ƆC* ; . .	*a*
	HX, *HI*, *HC*, *HƆ*, *XI*, *XƆ*, *IH*, *IX*, *IƆ*, *ƆH*, *ƆX*, *ƆI*, *ƆC* .	*n*

Ce tableau montre que, par exemple, une conclusion *N* peut être admise, lorsque le moyen terme, étranger au grand, contient le petit ; car, vis-à-vis de *HC* on rencontre *N* ; mais il montre en même temps qu'on ne saurait conclure *a* dans le même cas ; puisque la combinaison *HC* ne se trouve point vis-à-vis de cette lettre.

56. Cela posé, et eu égard aux tableaux (26),

1.° En ordonnant ainsi les combinaisons qui répondent à *A*,

II, *CI*,
IC, *CC* ;

on voit que, soit que les deux termes de la majeure soient dans le cas *I* ou dans le cas *C*, les seuls où ils puissent se trouver pour cette conclusion, il faut toujours que ceux de la mineure se trouvent dans l'un des cas *I* et *C* ; il faut donc que cette mineure soit *A* ; et, comme la majeure ne peut alors se trouver elle-même que dans l'un des deux cas *I* et *C*, il faut aussi que cette majeure soit *A* ; ce qui donne le seul système de prémisses

AA.

2.° En ordonnant ainsi les combinaisons qui répondent à *N*

HI , *IH* ;

HC , *ƆH* ;

on voit que, si les deux termes de la majeure sont dans le cas *H*, ceux de la mineure ne pourront être que dans l'un des deux cas *I* et *C*, en sorte que cette mineure sera *A*; et que, si les deux termes de la mineure sont dans le cas *H*, ceux de la majeure ne pourront être que dans l'un des deux cas *I* et *Ɔ*, en sorte que cette majeure sera *V*; et, comme le cas *H*, considéré isolément, ne peut répondre qu'à *N* et *N*; il s'ensuit que nous aurons uniquement ici les systèmes de prémisses

NA , *NA* , *VN* , *VN* .

3.° En disposant ainsi les combinaisons qui répondent à *a*

IX , *CX* ,

XI , *II* , *CI* , *ƆI* ,

IC , *CC* ,

XƆ , *IƆ* , *CƆ* , *ƆƆ* ;

on voit d'abord que, si les deux termes de la majeure se trouvent dans l'un ou l'autre des deux cas *I*, *C*, c'est-à-dire, si cette majeure est *A*, les termes de la mineure devront être dans quelqu'un des quatre cas *X* , *I* , *C* , *Ɔ* , c'est-à-dire, que cette mineure devra être *A* , *a* , *V* ou *v* ; on voit de plus que, si les deux termes de la mineure se trouvent dans l'un des deux cas *I* , *Ɔ* , c'est-à-dire, si cette mineure est *V*, ceux de la majeure devront être dans quelqu'un des quatre cas *X* , *I* , *C* , *Ɔ* , c'est-à-dire que

cette majeure devra être *A* , *a* , *Ɐ* ou *ɐ*. On aura donc, pour la conclusion *ɐ*, les systèmes de prémisses

AA , *Aa* , *Aɐ* , *AⱯ* , *ⱯⱯ* , *aⱯ* , *ɐⱯ* .

4.° Enfin, en disposant ainsi les combinaisons qui répondent à *n*

HX , *XI* , *IH* , *ↃH* ,

HI , *XↃ* , *IX* , *ↃX* ,

HC , *IↃ* , *ↃI* ,

HↃ , *ↃↃ* .

on voit, 1.° que, les termes de la majeure étant dans le cas *H*, ceux de la Mineure ne pourront être que dans quelqu'un des cas *X* , *I* , *C* , *Ↄ* , c'est-à-dire que cette mineure devra être *A* , *a* , *Ɐ* ou *ɐ*; 2.° que, les termes de la majeure étant dans le cas *X*, ceux de la mineure ne pourront être que dans quelqu'un des cas *I* , *Ↄ* , en sorte que cette mineure sera nécessairement *Ɐ* ; 3.° que, les termes de la majeure étant dans le cas *I*, ceux de la mineure ne pourront être que dans quelqu'un des cas *H* , *X* , *Ↄ* ; c'est-à-dire que cette mineure devra être *N* , *n* ou *Ɲ* ; 4.° qu'enfin les termes de la majeure étant dans le cas *Ↄ* , ceux de la mineure ne pourront être que dans quelqu'un des cas *H* , *X* , *I* , *Ↄ* , de manière que cette mineure devra être *N* , *n* , *Ɐ* ou *Ɲ*. On voit donc, 1.° que, la mineure étant *A* , *a* ou *ɐ*, la majeure devra se trouver dans le cas *H*, et sera conséquemment *Ɲ* ou *N*; 2.° que la mineure étant *N* , *n* ou *Ɲ* , la majeure devra être dans l'un des cas *I* , *Ↄ* , et devra conséquemment être *Ɐ*; 3.° qu'enfin la mineure étant *Ɐ* , la majeure devra être dans quelqu'un des cas *H* , *X* , *Ↄ* , de sorte que cette majeure sera *N* , *n* ou *Ɲ*. On aura donc ainsi, pour cette dernière sorte de conclusion, les systèmes de prémisses

NA , Na , Nɐ , NA , Na , Nɐ , ∀N , ∀n , ∀N , N∀ , n∀ , N∀ .

57. En rassemblant toutes ces diverses observations, et rétablissant les conclusions, on aura donc, pour le système complet des formes syllogistiques concluantes,

AAA ,

NAN , *NAN* , *∀NN* , *∀NN* ;

AAa , *Aaa* , *Aɐa* , *A∀a* , *a∀a* , *∀∀a* , *∀ɐa* ;

NAn , *NAn* , *∀Nn* , *∀Nn* , *N∀n* , *n∀n* , *N∀n* , *∀nn* , *Nan* , *Nɐn* , *Nan* , *Nɐn* .

58. Si présentement, pour nous conformer à l'usage constant des logiciens, nous classons ces diverses formes syllogistiques, suivant les figures auxquelles elles se rapportent, nous obtiendrons le tableau que voici :

1.re Figure. . . . *AAA* , *NAN* , *AAa* , *Aaa* , *NAn* , *Nan* ;

2.me Figure. . . . *∀NN* , *∀∀a* , *ɐ∀a* , *N∀n* , *∀Nn* , *Nɐn* ;

3.me Figure. . . . *NAN* , *∀NN* , *∀Nn* , *∀nn* , *NAn* , *Nan* ;

4.me Figure. . . . *A∀a* , *a∀a* , *Aɐa* , *N∀n* , *n∀n* , *Nɐn* .

Il répond donc *six* modes à chaque figure, ce qui fait *vingt-quatre* formes en tout (*).

(*) Les logiciens ont réduit jusqu'ici le nombre de ces formes à *dix-neuf*; en se fondant sur ce que les *cinq* qu'ils négligent s'y trouvent implicitement comprises. Cela est vrai; mais ils n'en ont pas moins commis une inconséquence. Parmi ces dix-neuf formes, il en est en effet, comme nous le verrons bientôt, de plus proprement équivalentes que ne le sont celles-ci avec les cinq qu'ils mettent à l'écart.

59. Un examen attentif de ces *vingt-quatre* formes, et l'exclusion qu'elles donnent nécessairement à toutes celles qui leur sont étrangères, conduisent aux *huit* théorèmes généraux que voici, dont les quatre premiers sont indistinctement relatifs à toutes les figures, tandis que les quatre autres sont spécialement propres à chacune d'elles.

I. Une seule des prémisses peut être négative; et, dans ce cas, la conclusion l'est aussi.

II. Une seule des prémisses peut être particulière; et, dans ce cas, la conclusion l'est aussi.

III. Une majeure particulière ne saurait être suivie d'une mineure négative.

IV. Une conclusion négative ne saurait résulter de deux prémisses affirmatives.

V. Dans la première figure, *la majeure est universelle, et la mineure affirmative.*

VI. Dans la seconde figure, *si la majeure est affirmative, la mineure est universelle; si l'une des prémisses est négative, la majeure est universelle; enfin, si la mineure est affirmative, la conclusion est particulière.*

VII. Dans la troisième figure, *une prémisse est négative et la majeure est universelle.*

VIII. Dans la quatrième figure, *la mineure est affirmative, et la conclusion particulière.*

Pour compléter ces huit règles, il est essentiel d'ajouter qu'elles sont, à la fois, nécessaires et suffisantes, c'est-à-dire, en d'autres termes, qu'un syllogisme qui ne pèche contre aucune d'elles ne saurait être rejeté; tandis qu'au contraire on ne peut admettre, comme concluant, celui qui pèche contre une seule d'entre elles.

60. Ces règles peuvent donc, dans la pratique, remplacer tout ce qui les précède; et nous allons voir en effet qu'elles suffisent à elles seules pour reproduire les vingt-quatre seules formes syllogistiques concluantes.

D'abord,

D'abord, abstraction faite de toute distinction de figures, les systèmes de prémisses, concluantes ou non concluantes, ne sauraient être qu'au nombre de *seize* que voici :

AA, *AN*, *Aa*, *An*,

NA, *NN*, *Na*, *Nn*,

aA, *aN*, *aa*, *an*,

nA, *nN*, *na*, *nn* ;

mais (I) exclut les systèmes *NN*, *nN*, *Nn*, *nn* ; (II) exclut, en outre, les systèmes *aa*, *na*, *an* ; (III) exclut encore *aN* ; de sorte que nos recherches ne doivent plus porter que sur les huit systèmes

AA, *AN*, *NA*, *Aa*, *An*, *Na*, *aA*, *nA* ;

or, les systèmes *aA*, *AN*, *An*, sont exclus (V) de la première figure ; les systèmes *Aa*, *An*, *nA* le sont (VI) de la seconde ; les systèmes *AA*, *Aa*, *aA*, *nA* le sont (VII) de la troisième ; et les systèmes *AN*, *An* le sont (VIII) de la quatrième ; de sorte que les systèmes de prémisses qui seuls peuvent répondre à chaque figure sont tels qu'on le voit ici :

1.re Figure. . . . *AA*, *NA*, *Aa*, *Na* ;

2.me Figure. . . . *VV*, *VN*, *NV*, *Nv*, *vV* ;

3.me Figure. . . . *VN*, *NA*, *Vn*, *Na* ;

4.me figure. . . . *AV*, *NV*, *Av*, *Nv*, *aV*, *nV*.

Cela posé ;

Dans la *première figure* on ne pourra former

De *AA* (*IV*) que *AAA* , *AAa* ;

De *NA* (*I*) que *NAN* , *NAn* ;

De *Aa* (*II*, *IV*) que *Aaa* ,

De *Na* (*I*, *II*) que *Nan* .

Dans la *deuxième figure* on ne pourra former

De *VV* (*IV*, *VI*) que *VVa* ,

De *VN* (*I*) que *VNN* , *VNn* ,

De *NV* (*I* , *VII*) que *NVn* ;

De *Na* (*I* , *II*) que *Nan* ,

De *nV* (*II*, *IV*) que *nVa* ;

Dans la *troisième figure* on ne pourra former

De *VN* (*I*, *VII*) que *VNN* , *VNn* ;

De *NA* (*I*, *VII*) que *NAN* , *NAn* ;

De *Vn* (*I*, *II*, *VII*) que *Vnn* ,

De *Na* (*I*, *II*, *VII*) que *Nan* .

Enfin, dans la *quatrième figure* on ne pourra former

De *Ay* (*IV*, *VIII*) que *Aya*;

De *Ny* (*I*, *VIII*) que *Nyn*,

De *Av* (*IV*, *VIII*) que *Ava*;

De *Nv* (*I*, *VIII*) que *Nvn*,

De *ay* (*IV*, *VIII*) que *aya*;

De *ny* (*I*, *VIII*) que *nyn*.

Ce qui reproduit exactement nos vingt-quatre formes (*).

61. Si ces vingt-quatre formes sont seules concluantes et le sont toutes, elles ne sont point néanmoins toutes nécessaires. Il en est, en effet, parmi elles, qui sont absolument équivalentes; et il en est aussi que d'autres renferment implicitement; de sorte qu'un raisonnement présenté sous une de ces formes peut, très-souvent, sans rien perdre de sa rigueur, être reproduit sous une ou plusieurs autres. L'art de réduire les formes syllogistiques au plus petit nombre possible, aux formes essentiellement distinctes, est ce qu'on appelle, en logique, la *Réduction des syllogismes*. Cette réduction est fondée sur les considérations suivantes :

62. 1.° Si quelqu'une des prémisses d'un syllogisme est une proposition susceptible de conversion simple, comme *N*, *N*, *a*, *v*,

(*) Les traités de dialectique, même les plus complets, ont à peu près tous négligé de prouver, à la fois, nettement, 1.° que ces vingt-quatre formes sont toutes concluantes; 2.° qu'elles sont les seules qui puissent l'être. C'est pourtant en ceci le point capital.

on n'altèrera aucunement la nature du syllogisme (30) ; en y remplaçant cette prémisse par sa converse simple.

2.° Si la conclusion d'un syllogisme est elle-même susceptible de conversion simple, comme *N*, *a*, on pourra également (30), sans en changer la nature, y remplacer cette conclusion par sa converse simple. Mais, comme alors le grand terme sera devenu petit terme et réciproquement ; la majeure sera aussi devenue mineure et réciproquement ; et en outre, dans les deux prémisses, ce qui était grand terme du syllogisme en sera devenu petit terme et réciproquement. Il suit de là que la conversion de la conclusion devra entraîner la permutation des prémisses, ainsi que le renversement des lettres par lesquelles elles se trouvent respectivement représentées.

3.° Un syllogisme concluant, dont la conclusion est universelle, comme *A* ou *N* doit l'être, à plus forte raison (20), en y remplaçant cette conclusion par sa subalterne *a* ou *n*.

4.° Enfin, un syllogisme concluant, dont quelque prémisse est particulière, comme *a*, *n*, *v* ou *u*, doit demeurer tel, à plus forte raison, en y remplaçant cette prémisse par la proposition *A*, *N*, *V* ou *N*, dont elle est la subalterne.

63. En vertu de la première observation, on voit sur-le-champ que

Nvn, *Nan*, *Nvn* sont équivalents à *Nan* ;

Que *VNN* l'est à . . . . *VNN* ;

Que *VNn* l'est à . . . . *VNn* ;

Que *NAN* l'est à . . . . *NAN* ;

Que *Aaa* l'est à . . . . *Ava* ;

Que *NAn* l'est à . . . . *NAn* ;

Que *aVa* l'est à . . . . *vVa* ;

Que *NVn* l'est à . . . . *NVn* :

Voilà donc *dix* formes qui peuvent être supprimées, comme superflues, ce qui en réduit le nombre aux *quatorze* suivantes :

Naa, *yNN*, *yNn*, *NAN*, *Aaa*, *NAn*, *aya*;

Nyn, *AAA*, *AAa*, *ynn*, *Aya*, *nyn*, *yya*;

Mais, en vertu de la seconde observation,

aya équivaut à *Aaa* ou *Aaa*;

yya équivaut à *AAa*;

yNN équivaut à *NAN*.

Voilà donc encore trois formes superflues; et conséquemment les formes essentiellement distinctes se réduisent aux *onze* que voici :

Naa, *yNn*, *NAN*, *Aaa*, *NAn*, *Nyn*, *AAA*, *AAa*, *ynn*, *Aya*, *nyn*;

64. Présentement, en vertu de la troisième observation,

NAn est contenu dans *NAN*;

AAa est contenu dans *AAA*;

et, en vertu de la quatrième,

yNn est contenu dans *ynn*;

Nyn est contenu dans *nyn*;

Aya est contenu dans *Aaa*;

voilà donc encore *cinq* formes qui peuvent être supprimées, comme contenues implicitement dans cinq autres. Il n'importe donc de conserver que les *six* seules formes

$$AAA\ ,\ NAN\ ,\ Ava\ ,\ Nan\ ,\ \nu nn\ ,\ n\nu n\ ;$$

et encore allons-nous voir, qu'à la rigueur, les deux premières peuvent remplacer les quatre qui les suivent ; c'est-à-dire qu'on peut prouver les conclusions de celles-ci, à quelqu'un qui en admet les prémisses, en n'employant que des syllogismes des deux premières formes.

65. Cela est fondé sur ce principe évident, savoir : qu'*un syllogisme est concluant, toutes les fois qu'avec la contradictoire de sa conclusion et l'une de ses prémisses, on peut former un syllogisme concluant, dont la conclusion soit la contradictoire de son autre prémisse.*

66. Supposons, en effet, 1.° qu'accordant les prémisses *Av* du syllogisme *Ava*, on prétende en refuser la conclusion *a* ; on se trouvera alors forcé d'admettre (20), la contradictoire *N* de cette conclusion. Prenant donc *G* pour moyen terme, et formant un syllogisme dont la majeure soit la converse simple de cette contradictoire, et dont la mineure soit la majeure du premier ; ce syllogisme se trouvera être de la forme *NAN* ; et sa conclusion se trouvera être précisément la contradictoire de la mineure *v* qu'on avait admise.

2.° Supposons qu'accordant les prémisses *Na* du syllogisme *Nan*, on prétende en refuser la conclusion *n* ; on sera contraint d'admettre la contradictoire *A* de cette conclusion. Prenant donc *G* pour moyen terme, et formant un syllogisme qui ait pour mineure cette contradictoire, et pour majeure la converse simple de la majeure du premier ; ce syllogisme se trouvera encore être de la forme *NAN*, et sa conclusion *N* sera justement la contradictoire de la mineure *a* qu'on avait admise.

3.° Supposons qu'accordant les prémisses *yn* du syllogisme *ynn*, on prétende en refuser la conclusion *n*; on sera contraint (20) d'admettre la contradictoire *A* de cette conclusion. Prenant donc *G* pour moyen terme, et formant un syllogisme dont la mineure soit cette contradictoire et dont la majeure soit celle du premier; ce syllogisme sera de la forme *AAA*, et sa conclusion *A* sera justement la contradictoire de la mineure *n* qu'on avait admise.

4.° Supposons enfin qu'accordant les prémisses *ny* du syllogisme *nyn*, on prétende en rejeter la conclusion *n*; on sera contraint (20) d'admettre la contradictoire *A* de cette conclusion. Prenant donc *P* pour moyen terme, et formant un syllogisme dont la majeure soit cette contradictoire, et dont la mineure soit celle du premier; ce syllogisme sera encore de la forme *AAA*, et sa conclusion *A* sera justement la contradictoire de la majeure *n* qu'on avait admise (*).

67. L'expérience a prouvé que, parmi les diverses formes syllo-

---

(*) Dans les traités de logique, on se contente de ramener les vingt-quatre formes syllogistiques concluantes aux quatre premières de la première figure; mais on voit qu'elles peuvent, à la rigueur, être réduites aux deux premières seulement. On peut même remarquer que, d'après la note du n.° 14, la forme *NAN* rentre dans la forme *AAA*, qui est ainsi la seule d'où toutes les autres dérivent.

Les commentateurs d'Aristote, pour faciliter le souvenir des formes syllogistiques concluantes, les avaient rapportées à quatre vers techniques, dont chaque mot rappelait une de ces formes, et montrait en outre, par les lettres dont il était composé, à quel mode de la première figure le syllogisme se réduisait, et ce qu'il fallait faire pour l'y ramener. Le grand nombre des conditions auxquelles on avait cherché à satisfaire, dans la composition de ces vers artificiels, aurait peut-être dû en faire excuser un peu la dureté, qui a été dans ces derniers temps le sujet d'une multitude de plaisanteries assez mauvaises. Les vers des méthodes latine et grecque de Port-Royal, ceux de la Géographie de Buffier, etc., qui ont été plus épargnés, ne méritaient peut-être guère plus de faveur.

gistiques, celles de la première figure sont les seules généralement propres à convaincre les hommes même les moins au courant des règles de la dialectique ; ce qui paraît tenir principalement à ce que, dans ces sortes de syllogismes, la disposition des termes extrêmes est, dans la conclusion, la même que dans les prémisses. On fera donc bien, dans la pratique, de profiter des précédentes observations, pour employer de préférence les syllogismes de cette figure.

68. Ce qui précède offrirait une théorie complète du mécanisme du raisonnement, si l'on n'employait jamais dans le discours que des propositions simples ; mais malheureusement nos langues en emploient d'une multitude d'autres sortes ; et il paraît également difficile soit d'en restreindre le nombre, soit de donner une théorie qui embrasse toutes celles dont on peut faire usage (*).

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème d'astronomie sphérique.

CONNAISSANT trois distances zénitales vraies d'une même étoile ; et les différences d'azimuts qui leur correspondent ; déterminer, 1.° la déclinaison de l'étoile ; 2.° la hauteur du pôle ; 3.° la direction du méridien ?

(*) Les bornes étroites dans lesquelles nous avons cherché à resserrer cet essai, peuvent en rendre une première lecture un peu difficile ; mais nous pensons qu'en y revenant à plusieurs fois, on finira par n'y plus rencontrer de difficultés sérieuses.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Sur les intersections des lignes et des surfaces.

Extrait d'un mémoire présenté à l'académie royale des sciences, en décembre 1816;

Par M. LAMÉ, ancien élève de l'école polytechnique.

On sait qu'un même point peut être donné sur un plan, d'une infinité de manières différentes, par l'intersection de deux courbes; qu'une même courbe peut être donnée dans l'espace, d'une infinité de manières différentes, par l'intersection de deux surfaces; et qu'enfin un même point peut être donné dans l'espace, d'une infinité de manières différentes, par l'intersection de trois surfaces.

Lors donc que, cherchant analitiquement un point sur un plan, par l'intersection de deux lignes, ou une ligne dans l'espace par l'intersection de deux surfaces, ou enfin un point dans l'espace par l'intersection de trois surfaces, on est parvenu à des lignes ou surfaces qui par leur intersection déterminent le point ou la ligne cherchés, on ne doit point s'arrêter là; et, pour ne rien laisser à désirer dans la solution du problème dont on s'occupe, il est souvent nécessaire d'examiner si le point ou la ligne cherchés ne pourraient pas être obtenus, ainsi qu'il arrive fréquemment, par l'intersection de lignes ou de surfaces plus simples que celles qu'on avait d'abord obtenues. C'est ainsi, par exemple, que l'on peut substituer aux intersections de deux cercles celles de l'un d'eux avec la corde qui

leur est commune ; et le recueil à qui je livre ces réflexions offre, en particulier, un grand nombre d'exemples, très-remarquables, de l'emploi le plus heureux de ces sortes de substitutions.

On se trouve donc naturellement conduit, par ces considérations, à la recherche des conditions nécessaires, 1.° pour que trois lignes tracées sur un même plan se coupent en un même point ; 2.° pour que trois surfaces se coupent suivant une même courbe ; 3.° enfin, pour que quatre surfaces se coupent en un même point. Je vais traiter ces questions pour les lignes et surfaces du premier et du second ordre seulement ; je tirerai ensuite des résultats que j'aurai obtenus quelques conséquences théoriques et pratiques qui ne me paraissent pas dépourvues d'intérêt. Je supposerai constamment, d'ailleurs, que les coordonnées sont rectangulaires.

PROBLÈME II. Trouver la condition nécessaire pour que trois droites passent par un même point ?

Solution. Soient les équations des trois droites ainsi qu'il suit :

$$\left.\begin{aligned} ax+by+c&=0\,,\\ a'x+b'y+c'&=0\,,\\ a''x+b''y+c''&=0\,. \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

l'élimination de x et y entre elles donnera sur-le-champ, pour la condition cherchée, l'équation

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0\,. \qquad (2)$$

Mais on peut parvenir au même résultat par un procédé un peu différent qui, à la vérité, n'a dans le cas présent, aucun avantage marqué sur celui-là ; mais qui nous sera fort utile pour les autres recherches auxquelles nous aurons ensuite à nous livrer.

En prenant la somme des produits des deux premières équations (1) par deux multiplicateurs indéterminés m, m', il viendra

$$(am+a'm')x+(bm+b'm')y+(cm+c'm')=0, \qquad (3)$$

équation qui, à cause de l'indétermination des multiplicateurs m, m', est propre à représenter toutes les droites qui passent par l'intersection des deux premières droites (1).

Si donc on veut que ces trois droites se coupent en un même point, il devra être possible de disposer des indéterminées m et m' de manière à faire coïncider la troisième équation (1) avec l'équation (3). Cela donnera

$$am+a'm'=a'' \ , \ bm+b'm'=b'' \ , \ cm+c'm'=c'' \ ; \qquad (4)$$

et, en éliminant m et m' entre ces trois équations, on retombera de nouveau sur l'équation (2).

PROBLÈME II. Trouver les conditions nécessaires pour que trois lignes du second ordre se coupent suivant les mêmes points ?

Solution. Soient les équations des lignes dont il s'agit ainsi qu'il suit :

$$\left.\begin{array}{l} a\ x^2+2b\ xy+c\ y^2+2d\ x+2e\ y+f\ =0\ , \\ a'\ x^2+2b'\ xy+c'\ y^2+2d'\ x+2e'\ y+f'\ =0\ , \\ a''x^2+2b''xy+c''y^2+2d''x+2e''y+f''=0\ . \end{array}\right\} \ (1)$$

Soit prise la somme des produits des deux premières équations par deux multiplicateurs indéterminés m et m'; on aura ainsi

$$(am+a'm')x^2+2(bm+b'm')xy+(cm+c'm')y^2$$

$$+2(dm+dm')x+2(em+e'm')y(fm+f'm')=0 \ ; \qquad (2)$$

équation qui, dans sa généralité, représente toutes les lignes du second ordre qui passent par les intersections des deux premières lignes (1).

Remarquons, avant d'aller plus loin, que cette équation pourrait

fort bien, en général, appartenir à une parabole; mais de deux manières seulement, puisque la condition

$$(bm+b'm')^2=(am+a'm')(cm+c'm')$$

détermine le rapport $\frac{m}{m'}$, et ne lui assigne uniquement que deux valeurs. Remarquons encore que cette équation ne saurait généralement appartenir à un cercle. Il faudrait, en effet, pour cela, qu'on eût en même temps

$$am+a'm'=cm+c'm' \ , \quad bm+b'm'=0 \ ,$$

équations d'où on tire

$$\frac{m}{m'}=-\frac{a'-c'}{a-c} \ , \quad \frac{m}{m'}=-\frac{b'}{b} \ ;$$

et, par suite,

$$b(a'-c')=b'(a-c) \ :$$

Telle est donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'un cercle puisse passer par les intersections de nos deux courbes.

Mais cette même équation (2) pourra représenter une infinité d'ellipses et d'hyperboles; et, si l'on veut, en particulier, qu'elle représente la troisième courbe (1) ou, ce qui revient au même, si l'on veut que les trois courbes (1) aient les mêmes intersections, il faudra qu'on ait, à la fois,

$$\left.\begin{array}{l} am+a'm'=a'' \ , \ bm+b'm'=b'' \ , \ cm+c'm'=c'' \ , \\ dm+d'm'=d'' \ , \ em+e'm'=e'' \ , \ fm+f'm'=f'' \ . \end{array}\right\} \quad (3)$$

L'élimination de m et m' entre ces six équations conduira à *quatre* autres qui exprimeront les conditions cherchées.

Les équations

$$am+a'm'=a'' ,$$

$$bm+b'm'=b'' ,$$

$$dm+d'm'=d'' ,$$

sont (*Prob. I*) celles qui exprimeraient que les trois droites

$$a\,x+b\,y+d\,=0 ,$$

$$a'x+b'y+d'=0 ,$$

$$a''x+b''y+d''=0 ,$$

concourent en un même point. Mais on sait d'un autre côté (*Annales*, tom. VI, pag. 160) que chacune de ces dernières équations est celle du diamètre de chaque courbe qui coupe en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des x; et, puisque d'ailleurs la direction de cet axe est quelconque, on en peut conclure le théorème suivant :

THÉORÈME. Si plusieurs sections coniques ont quatre points communs ; dans quelque direction qu'on leur mène des diamètres parallèles, les conjugués de ces diamètres concourront en un même point.

Au moyen de ce théorème, on peut facilement résoudre les deux problèmes suivans :

PROBLÈME I. Étant donnés cinq points du périmètre d'une section conique, déterminer graphiquement son centre ?

Solution. Soient A, B, C, D, E (fig. 1) les cinq points donnés. Le système des deux droites MBA, MCD peut être considéré comme une section conique, passant par les quatre points A, B, C, D ; et il en est de même du système des deux droites ANC, BND ; mais la courbe dont il s'agit doit aussi passer par ces quatre points ; voilà donc trois sections coniques qui ont quatre points communs ;

d'où il suit que les conjugués des diamètres qui, dans ces trois lignes, sont parallèles à la corde DE de la troisième doivent concourir en un même point P. Or, ces conjugués MP, NP sont très-aisés à déterminer, pour les sections coniques AMD, AND, dont les centres M, N sont connus ; leur construction déterminera donc le point P, qui sera aussi conséquemment un des points du conjugué du diamètre qui, dans notre courbe, est parallèle à la corde DE; mais le milieu Q de cette corde est aussi un point de ce conjugué; donc la droite PQ, conduite par ces deux points, est un diamètre de notre courbe. En opérant ensuite par rapport à AE comme nous l'avons fait par rapport à DE, on déterminera un autre diamètre de la même courbe, lequel, par son intersection O avec le premier, en fera connaître le centre.

Une fois le centre connu, on pourra déterminer les autres élémens de la courbe, par des procédés sur lesquels nous n'insisterons pas, parce qu'ils sont tout-à-fait étrangers à notre objet.

PROBLÈME II. Étant donnés quatre points du périmètre d'une parabole, construire graphiquement la direction commune des diamètres de la courbe?

Solution. Soient A, B, C, D (fig. 2) les quatre points donnés. Le système des deux droites MBA, MDC peut être considéré comme une section conique passant par les quatre points A, B, C, D; et il en est de même du système des deux droites AND, BNC; ces deux systèmes forment donc, avec la parabole dont il s'agit, trois sections coniques ayant quatre points communs; d'où il suit que pour ces trois lignes les conjugués des diamètres parallèles à une même droite fixe doivent concourir en un même point; donc, en particulier, si, pour les deux lignes AMC, ANC, on trouve deux systèmes de diamètres conjugués parallèles, l'une des deux directions qu'ils affecteront sera la direction d'un diamètre de la parabole.

Tout se réduit donc à mener par le point B une droite, rencontrant ND en X et MC en Y, telle que P et Q étant les milieux respectifs de BY et BX, les droites MP et NQ soient parallèles?

Supposons le problème résolu. Considérons le parallélogramme BNXR ; RQ sera égal à NQ ; la droite BXY sera donc conjuguée à RN, et à sa parallèle EF ; la figure BFYE sera donc aussi un parallélogramme. Cela posé, on aura les proportions $\frac{EY}{FG}=\frac{MY}{MC}$, $\frac{EG}{FY}=\frac{MG}{MY}$, $\frac{EY}{FC}=\frac{EG}{FY}$; en les multipliant entre elles, et observant que EY=BF, il viendra

$$\frac{\overline{BF}^2}{\overline{FC}^2}=\frac{MG}{MC};$$

en joignant à cette proportion l'équation BF+FC=BC, on aura tout ce qu'il faut pour déterminer BF et FC et conséquemment le point F ; on connaîtra donc les directions MF et NR, qui pourront être prises pour celle des diamètres de la parabole. Le problème de la détermination du point F aura deux solutions ; mais en les adoptant successivement, on ne fera que passer de la direction EF à la direction BY, ainsi que cela doit être.

PROBLÈME III. Trouver les conditions nécessaires pour que trois plans se coupent suivant une même droite?

Solution. En supposant que les équations de ces trois plans sont

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz+d&=0,\\ a'x+b'y+c'z+d'&=0,\\ a''x+b''y+c''z+d''&=0;\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

on parviendra aux conditions cherchées, en exprimant que la somme des produits des deux premières équations, par deux multiplicateurs m, m' est la même que la troisième ; on obtiendra ainsi les quatre équations

$$\left.\begin{array}{ll} am+a'm'=a'' , & cm+c'm'=c'' , \\ bm+b'm'=b'' ; & dm+d'm'=d'' ; \end{array}\right\} \quad (2)$$

entre lesquelles il faudra éliminer m et m', ce qui donnera deux conditions.

Deux quelconques des trois premières équations (2) joints à la 4.me prouvent que les traces de nos trois plans sur un des plans coordonnés, c'est-à-dire, sur un plan quelconque, doivent concourir en un même point; ce qui est d'ailleurs évident.

PROBLÈME IV. Trouver la condition nécessaire pour que quatre plans concourent en un même point?

Solution. En supposant que les équations de ces quatre plans sont

$$\left.\begin{array}{l} a\ x+b\ y+c\ z+d\ =0 , \\ a'\ x+b'\ y+c'\ z+d'\ =0 , \\ a''\ x+b''\ y+c''\ z+d''\ =0 , \\ a'''x+b'''y+c'''z+d'''=0 ; \end{array}\right\} \quad (1)$$

on pourrait d'abord parvenir à la condition cherchée, en éliminant x, y, z entre ces quatre équations; mais on y parviendra également, en exprimant que la somme des produits des trois premières par trois multiplicateurs indéterminés m, m', m'' est la même que la quatrième. Cela donne les quatre équations

$$\left.\begin{array}{ll} am+a'm'+a''m''=a''' ; & cm+c'm'+c''m''=c''' , \\ bm+b'm'+b''m''=b''' , & dm+d'm'+d''m''=d''' ; \end{array}\right\} \quad (2)$$

entre lesquelles éliminant m, m', m'', on parviendra également à la condition cherchée.

PROBLÈME V.

PROBLÈME V. Trouver les conditions nécessaires pour que trois surfaces du second ordre se coupent suivant une même courbe?

Solution. En supposant, pour les équations des surfaces dont il s'agit,

$$\left.\begin{array}{l} a\,x^2+b\,y^2+c\,z^2+2d\,xy+2e\,xz+2f\,yz+2g\,x+2h\,y+2k\,z+l=0\,, \\ a'x^2+b'y^2+c'z^2+2d'xy+2e'xz+2f'yz+2g'x+2h'y+2k'z+l'=0\,, \\ a''x^2+b''y^2+c''z^2+2d''xy+2e''xz+2f''yz+2g''x+2h''y+2k''z+l''=0\,; \end{array}\right\}\quad(1)$$

et exprimant que la dernière est la somme des produits des deux autres par deux multiplicateurs indéterminés m, m', on obtiendra les dix équations

$$\left.\begin{array}{ll} am+a'm'=a''\,, & fm+f'm'=f''\,, \\ bm+b'm'=b''\,; & gm+g'm'=g''\,, \\ cm+c'm'=c''\,, & hm+h'm'=h''\,, \\ dm+d'm'=d''\,; & km+k'm'=k''\,, \\ em+e'm'=e''\,, & lm+l'm'=l''\,. \end{array}\right\}\quad(2)$$

entre lesquelles éliminant m et m', on obtiendra les conditions cherchées, lesquelles conséquemment seront au nombre de *huit*.

La première, la quatrième et la cinquième équations de la première colonne, jointes à la deuxième de la seconde, prouvent (*Prob. III*) que les trois plans dont les équations sont

$$\left.\begin{array}{l} a\,x+d\,y+e\,z+g=0\,; \\ a'x+d'y+e'z+g'=0\,, \\ a''x+d''y+e''z+g''=0\,, \end{array}\right\}\quad(3)$$

se coupent suivant une même droite; mais ces plans sont (*Annales*,

tom. VI, pag. 165) les conjugués des diamètres de nos trois surfaces parallèles à l'axe des x, c'est-à-dire à une droite quelconque; on a donc le théorème suivant.

THÉORÈME. Lorsque plusieurs surfaces du second ordre se coupent suivant une même courbe, les plans diamétraux conjugués à des diamètres parallèles de ces surfaces se coupent tous suivant une même droite.

Si la troisième équation (1) représentait une sphère, il faudrait qu'on eût, à la fois,

$$am+a'm'=bm+b'm'=cm+c'm' ;$$

$$dm+d'm'=em+e'm'=fm+f'm' ;$$

entre lesquelles éliminant $\frac{m}{m'}$, il viendrait

$$\frac{a-b}{a'-b'}=\frac{a-c}{a'-c'}=\frac{d}{d'}=\frac{e}{e'}=\frac{f}{f'} ,$$

conditions, au nombre de quatre, qui expriment que la commune section des deux premières surfaces (1) est sur une sphère.

PROBLÈME VI. Trouver les conditions nécessaires pour que quatre surfaces du second ordre aient les mêmes points d'intersection.

Solution. En supposant, pour les équations des surfaces dont il s'agit,

$$\left.\begin{array}{l} a\,x^2+b\,y^2+c\,z^2+2d\,xy+2e\,xz+2f\,yz+2g\,x+2h\,y+2k\,z+l=0 , \\ a'x^2+b'y^2+c'z^2+2d'xy+2e'xz+2f'yz+2g'x+2h'y+2k'z+l'=0 , \\ a''x^2+b''y^2+c''z^2+2d''xy+2e''xz+2f''yz+2g''x+2h''y+2k''z+l''=0 , \\ a'''x^2+b'''y^2+c'''z^2+2d'''xy+2e'''xz+2f'''yz+2g'''x+2h'''y+2k'''z+l'''=0 ; \end{array}\right\} (1)$$

il faudra exprimer que la quatrième est la somme des produits des trois autres par les multiplicateurs indéterminés m, m', m'', ce qui donnera les dix équations

$$\left.\begin{array}{ll}
am+a'm'+a''m''=a''' , & fm+f'm'+f''m''=f''' , \\
bm+b'm'+b''m''=b''' , & gm+g'm'+g''m''=g''' , \\
cm+c'm'+c''m''=c''' , & hm+h'm'+h''m''=h''' , \\
dm+d'm'+d''m''=d''' , & km+k'm'+k''m''=k''' , \\
em+e'm'+e''m''=e''' , & lm+l'm'+l''m''=l''' ;
\end{array}\right\} \quad (2)$$

entre lesquelles éliminant m, m', m'', on parviendra aux conditions cherchées, lesquelles seront conséquemment au nombre de *sept*.

Les première, quatrième et cinquième équations de la première colonne, jointes à la seconde de la deuxième prouvent (*Problème IV*) que les quatre plans dont les équations sont

$$a\ x+d\ y+e\ z+g\ =0 ,$$

$$a'x+d'y+e'z+g'=0 ;$$

$$a''x+d''y+e''z+g''=0 ;$$

$$a'''x+d'''y+e'''z=g'''=0 ;$$

concourent tous en un même point; mais ces plans sont (*Annales*, tom. VI, pag. 165) les plans diamétraux conjugués aux diamètres qui, dans nos quatre surfaces, se trouvent parallèles à l'axe des x, c'est-à-dire à une droite quelconque; on a donc le théorème que voici :

THÉORÈME. Lorsque des surfaces du second ordre passent toutes par les neuf mêmes points donnés, leurs plans diamétraux conjugués à des diamètres parallèles concourent tous en un même point.

Par des procédés analogues à ceux que nous avons employés ci-dessus pour les lignes du second ordre, on parviendrait à déduire de ce théorème la solution du problème que voici : *Étant donnés neuf points d'une surface du second ordre, déterminer son centre?*

Si la quatrième des équations (1) appartenait à une sphère ; il faudrait qu'on eût

$$am+a'm'+a''m''=bm+b'm'+b''m''=cm+c'm'+c''m'' ;$$

$$dm+d'm'+d''m''=em+e'm'+e''m''=fm+f'm'+f''m''=0 ;$$

ce qui donnerait, en éliminant $\frac{m'}{m}$ et $\frac{m''}{m}$, les trois conditions

$$(a-b)(d'e''-e'd'')+(a'-b')(d''e-e''d)+(a''-b'')(de'-ed')=0 ;$$

$$(a-c)(d'e''-e'd'')+(a'-c')(d''e-e''d)+(a''-c'')(de'-ed')=0 ;$$

$$de'f''-df'e''+fd'e''-ed'f''+ef'd''-fe'd''=0 ,$$

qui expriment que les huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre se trouvent situés sur une même sphère.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Sur la manière d'intégrer, par approximation, entre deux limites données, toute fonction différentielle d'une seule variable ;

Par M. Chretien Kramp, professeur doyen de la faculté des sciences de Strasbourg, chevalier de l'Ordre royal de la légion d'honneur.



1. Dans un premier mémoire (*Annales*, tom. VI, pag. 372—388), j'ai donné la solution du problème indéterminé d'intégrer numériquement, par approximation, une fonction différentielle quelconque d'une seule variable, entre des limites données. En prenant pour *unité* l'intervalle constant qui sépare les ordonnées extrêmes, en supposant que la première se confond avec l'axe des y, et en les représentant consécutivement par a, b, c, d, ...; j'ai fait voir qu'on aura

$$\frac{\int y\mathrm{d}x-ax}{x^2}=\frac{1}{2}\Delta a$$

$$+\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)\Delta^2 a$$

$$+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{3}+\frac{2}{2}\right)\Delta^3 a$$

$$+\left(\frac{x^3}{5}-\frac{6x^2}{4}+\frac{11x}{3}-\frac{6}{2}\right)\Delta^4 a$$

$$+\left(\frac{x^4}{6}-\frac{10x^3}{5}+\frac{35x^2}{4}-\frac{50x}{3}+\frac{24}{2}\right)\Delta^5 a$$

$$+\left(\frac{x^5}{7}-\frac{15x^4}{6}+\frac{85x^3}{5}-\frac{225x^2}{4}+\frac{274x}{3}-\frac{120}{2}\right)\Delta^6 a$$

$$+\left(\frac{x^6}{8}-\frac{21x^5}{7}+\frac{175x^4}{6}-\frac{735x^3}{5}+\frac{1624x^2}{4}-\frac{1764x}{3}+\frac{720}{2}\right)\Delta^7 a$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

formule dans laquelle Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, ... sont données par les équations

$$1\Delta a=b-a,$$
$$1.2\Delta^2 a=c-2b+a,$$
$$1.2.3\Delta^3 a=d-3c+3b-a,$$
$$1.2.3.4\Delta^4 a=e-4d+6c-4b+a,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

2. Si l'on veut faire usage de ces formules, il faut d'abord s'entendre sur le diviseur général qu'on veut choisir. En supposant que ce diviseur doive être le membre entier n, on mettra partout $x=n$, et on arrêtera la série à $\Delta^n a$. Prenons pour exemple $n=7$; on aura

$$\frac{\int y dx-7a}{49}=\frac{1}{2}\Delta a+\frac{11}{6}\Delta^2 a+\frac{25}{4}\Delta^3 a+\frac{533}{30}\Delta^4 a+\frac{153}{4}\Delta^5 a$$
$$+\frac{631}{12}\Delta^6 a+\frac{751}{24}\Delta^7 a;$$

ou bien, en substituant et chassant les dénominateurs,

$$120960\frac{\int y dx-7a}{49}=$$
$$60480(b-a)$$
$$+110880(c-2b+a)$$
$$+126000(d-3c+3b-a)$$
$$+89554(e-4d+6c-4b+a)$$
$$+38556(f-5e+10d-10c+5b-a)$$
$$+8834(g-6f+15e-20d+15c-6b+a)$$
$$+751(h-7g+21f-35e+35d-21c+7b-a);$$

ou, en réduisant,

$$\frac{17280\int y dx}{7} = 751(a+h)$$
$$+3577(b+g)$$
$$+1323(c+f)$$
$$+2989(d+e)\ .$$

L'unité de cette expression étant la *septième* partie de l'intervalle qui sépare les ordonnées extrêmes ; si l'on veut prendre pour unité cet intervalle entier, on aura finalement

$$17280\int y dx = 751(a+h)$$
$$3577(b+g)$$
$$1323(c+f)$$
$$2989(d+e)\ .$$

3. On reconnaît que le calcul est bien fait, et à l'abri de toute erreur, lorsque les ordonnées également distantes des extrêmes, telles que a et h, b et g, c et f, d et e sont multipliées par le même coefficient numérique, et lorsque, de plus, en faisant les *huit* ordonnées a, b, c, d, e, f, g, h égales à l'unité, l'intégrale $\int y dx$ devient elle-même égale à l'unité. Un autre avantage de cette méthode, c'est que les valeurs numériques des coefficiens de a, b, c, d, ... paraissent toutes développées, sans être déduites d'aucun système d'équations du premier degré qu'il faille préalablement résoudre. C'est là principalement ce qui m'a permis de calculer mes formules depuis le diviseur *un* jusqu'au diviseur *douze*. J'aurais été plus loin que douze, et jusqu'au diviseur *vingt-quatre*, si la longueur présumée des calculs ne m'avait effrayé. J'observai, au surplus, qu'il devait inévitablement y avoir quelque autre méthode, beaucoup plus abrégée, pour parvenir au but dans tous les cas ; mais que, jusqu'ici du moins, j'avais fait de vains efforts pour la découvrir.

4. J'avais lieu d'espérer que quelques géomètres jugeraient cette recherche d'un assez haut intérêt pour en faire le sujet de leurs méditations. M. Bérard, principal du collége de Briançon, dans un mémoire ayant pour titre : *Méthode nouvelle pour quarrer les courbes, et intégrer, entre des limites données, toute fonction différentielle d'une seule variable* (*Annales*, tom. VII, pag. 101 et suiv.), prétend être parvenu au but. Il trouve, pour le diviseur général *six*, les quatre équations

$$\begin{aligned} 6 &= 2A+2B+2C+D\,; \\ 9 &= 9A+4B+C\,, \\ 243 &= 405A+80B+5C\,, \\ 2187 &= 5103A+448B+7C\,; \end{aligned}$$

d'où il tire, par l'élimination,

$$A=\tfrac{41}{140}\,;\quad B=\tfrac{216}{140}\,;\quad C=\tfrac{27}{140}\,;\quad D=\tfrac{272}{140}\,;$$

et, après avoir multiplié par 6, il a finalement

$$\begin{aligned} 804\int y\mathrm{d}x = {} & 41(y_0+y_6) \\ & +216(y_1+y_5) \\ & +27(y_2+y_4) \\ & +272y_3\,. \end{aligned}$$

Il aurait *sept* de ces équations, dans le cas du diviseur général *douze*, et *treize* dans le cas du diviseur général *vingt-quatre*. Il faut observer que, dans ce dernier cas, l'une des treize équations renfermera *toutes* les inconnues, et que chacune des douze autres en renfermera une de moins, c'est-à-dire *douze*. Il faut remarquer de plus que l'opération connue des soustractions réitérées ne suffira pas pour diminuer chaque fois d'une unité le nombre des inconnues, ce qui rendra la résolution complète des treize équations beaucoup plus

plus laborieuse qu'on ne pense. Tout cela n'empêche pas M. Bérard de dire (pag. 103) : « J'ai donc cherché à perfectionner un travail » si utile ; j'ai vaincu la difficulté qui avait arrêté M. Kramp ; et » j'ai eu la satisfaction de rencontrer une nouvelle manière de pro- » céder, qui n'a rien de commun avec celle de cet habile géomètre, » et qui permet de pousser l'approximation aussi loin qu'on le désire ». Examinons, au vrai, ce qu'il en est.

5. *Premièrement.* La méthode de M. Bérard n'est immédiatement applicable qu'à un diviseur *pair*. Dans le cas d'un diviseur *impair*, l'auteur serait un peu embarrassé, peut-être, de nous indiquer la modification qu'il faudrait faire subir à ses formules, pour les rendre également applicables (*)

6. *Secondement.* Nous pouvons assurer M. Bérard que les valeurs numériques des coefficiens qu'il nous a données, pour les sept termes qui répondent au diviseur général *douze*, sont entièrement erronnées et fausses. Les seules valeurs véritables sont celles que donne notre *douzième* formule (tom. VI, pag. 377). Elles sont très-différentes de celles de M. Bérard ; et, comme elles satisfont à toutes les conditions du problème, qui d'ailleurs ne saurait admettre qu'une solution, il faut nécessairement en conclure que les autres ne sauraient donner que des résultats trompeurs. Nous pouvons donc, à bien plus juste titre que M. Bérard, nous appliquer à nous-mêmes ce qu'il dit (tom. VII, pag. 114) : « Cette singularité » semblerait assez difficile à expliquer autrement que par quelque » erreur de calcul ; mais le point essentiel est de savoir laquelle » des deux formules doit être préférée ; et l'expérience assure l'avan- » tage à la nôtre ». Cette expérience sur laquelle M. Bérard croit pouvoir s'appuyer se réduit au simple calcul du logarithme naturel

(*) Ce ne nous semblerait pas là un très-grave inconvénient, attendu que, le diviseur général étant un nombre arbitraire, on est toujours maître de le choisir pair.

J. D. G.

de *deux*, qu'il trouve, d'après sa formule =0,69314 71806 261; et, d'après la mienne, =0,69314 71807 262; ce qui présente une différence d'une unité dans la *dixième* décimale. Il en résulte que la mienne laisse une erreur un peu plus grande que celle qui résulte de la formule de M. Bérard, en supposant toutefois que les calculs, de part et d'autre, sont rigoureusement exacts. Mais que peut-on raisonnablement conclure d'une application unique (*)?

7. *Troisièmement.* A plus forte raison sera-t-il permis de douter de l'exactitude de la formule (F_{24}). Elle a coûté à son auteur cent heures de travail. Je serais bien fâché que le calcul de mes douze formules m'eût seulement coûté la moitié de ce temps (**).

8. *Quatrièmement.* En employant successivement toutes mes *douze* formules, au calcul du *huitième* de la circonférence entière, qui, comme l'on sait, est l'intégrale de $\frac{dt}{1+t^2}$, prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=1$; et, en mettant en regard de chaque résultat l'erreur dont il se trouve affecté, j'ai eu le tableau suivant:

(*) Tout ceci nous semble mériter quelque explication.

D'abord il ne paraît point exact de dire que le problème dont se sont occupés MM. Kramp et Bérard ne puisse admettre qu'une solution unique. Nous en avons déjà fait l'observation dans la note de la page 102, et c'est une vérité reconnue par M. Kramp lui-même qui, au commencement du présent mémoire, le qualifie d'*indéterminé*. Il n'y aurait donc que la solution rigoureuse de ce problème qui pourrait être unique; mais cette solution rigoureuse est impossible, tant qu'on ne fixe pas la nature de la fonction y.

On ne peut donc rien conclure, pour ou contre les formules de MM. Kramp et Bérard, des différences qu'elles présentent, dans les applications. Celle des deux qui a l'avantage dans un cas peut le perdre dans un autre; et M. Kramp a grandement raison de dire en ce sens qu'une seule application ne suffit point pour prononcer entre elles. Nous en avions déjà fait la remarque (pag. 112).

J. D. G.

(**) Nous ne courrions probablement pas un très-grand risque en nous engageant à calculer en moins de *cent heures*, par la méthode de M. Kramp, la formule qui répond au diviseur 24.

J. D. G.

(I)	$\frac{\pi}{4}$=0,75000 00000 , Erreur	−0,03539 81634
(II)	0,78333 33333	−0,00206 48301
(III)	0,78461 53846	−0,00078 27788
(IV)	0,78552 94118	+0,00013 12484
(V)	0,78546 96045	+0,00007 14411
(VI)	0,78539 27139	−0,00000 54495
(VII)	0,78539 48256	−0,00000 33378
(VIII)	0,78539 81685	+0,00000 00051
(IX)	0,78539 81740	+0,00000 00106
(X)	0,78539 81874	+0,00000 00240
(XI)	0,78539 81785	+0,00000 00151
(XII)	0,78539 81630	−0,00000 00004

9. En donnant ce tableau, j'ai fait remarquer que la série des erreurs suivait une marche beaucoup plus irrégulière que la nature du problème et les moyens de solution que j'y avais appliqués ne semblaient devoir le comporter. On voit, en effet, que les erreurs sont *négatives* pour I, I, III, *positives* pour IV, V, *négatives* pour VI, VII, *positives* pour VIII, IX, X, XI, et *négatives* de nouveau pour XII. Elles forment ainsi une progression, tantôt croissante et tantôt décroissante. Mais, dans tout ceci, il n'y a rien qui choque le sens commun et qui soit contraire aux principes. Soit, en effet, (fig. 8) l'arc de courbe DEF, rapporté à l'axe

AC. Divisons cet axe en deux également en B, et élevons les trois perpendiculaires AD, BE, CF. Dans ce cas, la première valeur approximative de l'arc DEF sera DE+EF. Divisons le même axe AC en trois parties égales, aux points G et H ; élevons les deux perpendiculaires GI, HK, et menons les trois cordes DI, IK, KF ; la somme DI+IK+KF représentera la seconde valeur approximative de l'arc AF ; et il est très-visible qu'il n'y a aucune sorte de rapport constant et nécessaire entre DE+EF et DI+IK+KF ; et il en irait absolument de même, si l'on multipliait d'avantage le nombre des divisions de AC (*).

10. M. Bérard n'a pas seulement vu que j'avais manqué ; mais il a de plus découvert la raison de ma méprise ; elle consiste, suivant lui, dans un certain *point d'inflexion*, dont j'ai négligé la considération ; et faute d'y avoir fait attention, j'ai été entraîné dans de fausses conséquences. « Si la courbe à quarrer, dit-il, présente » un point d'inflexion, entre les limites de l'intégrale cherchée, » il sera bon d'évaluer séparément les portions d'aire situées de part » et d'autre de ce point ; car le défaut de cette attention ne pourrait

---

(*) Comme il s'agit ici, non pas d'un problème de rectification, mais d'un problème de quadrature ; il nous semblerait plus exact de parler de la détermination de l'aire du segment mixtiligne ADFC ; en considérant ADEB+BEFC comme première, et ADIG+GIKH+HKFC comme seconde approximation. Or, tant que, dans toute son étendue, la courbe aura constamment sa convexité tournée dans le même sens, il y aura nécessairement entre ces valeurs approchées successives cette relation qu'elles iront continuellement en croissant, si la première est plus petite que l'aire curviligne, et en décroissant dans le cas contraire. Mais il n'en sera plus ainsi s'il y a, entre les limites de l'intégrale, quelques points d'inflexion. Il n'en sera plus de même non plus, lorsque, comme le fait M. Kramp dans son second mémoire, on substituera aux cordes des courbes paraboliques qui pourront passer tantôt au-dessus et tantôt au-dessous de la courbe qu'il s'agit de quarrer.

J. D. G.

» qu'altérer sensiblement l'exactitude du résultat. On verra ci-après » comment M. Kramp, pour avoir négligé cette remarque, a été » conduit à de *fausses conséquences*; il a cru voir un paradoxe là » où il n'en existe pas. Il est presque superflu d'observer qu'il faudrait » à plus forte raison en user ainsi, si, entre les limites de l'in- » tégrale, la courbe offrait un ou plusieurs points de rebrousse- » ment (*) ».

11. Je conviens volontiers que je n'entends absolument rien à tous ces points d'inflexion et de rebroussement. J'avais dit d'ailleurs (tom. VI, pag. 299) : Elle (l'équation de condition) est satisfaite, » quoiqu'avec une différence presque insensible, lorsque la portion » de courbe qui est comprise entre les limites de l'intégrale est sans » asymptote, sans imaginaires, sans points d'inflexion ni de rebrous- » sement; lorsqu'enfin elle ne s'écarte pas trop de quelque courbe » rentrante, telle que les ellipses des différens degrés ». Cependant M. Bérard y revient encore (pag. 110). « Ce géomètre, dit-il, » pour n'avoir pas fait attention au point d'inflexion, a tiré de ses » résultats des conséquences tout-à-fait fausses. En effet, sa formule » n.° 8 lui a donné plus d'exactitude que ses formules n.° 9 et

(*) Il nous paraît qu'en remarquant un point d'inflexion, entre $x=0$, $x=1$; dans la courbe dont l'équation est $y=\frac{1}{1+x^2}$, M. Bérard a donné, en effet, une raison très-plausible des anomalies que présente la série des erreurs des approximations successives de M. Kramp; et nous pensons même que cette raison serait tout-à-fait péremptoire, dans le cas de l'emploi des trapèzes rectilignes; mais nous ne saurions partager l'opinion de M. Bérard, sur la nécessité de diviser l'intégrale en plusieurs parties, lorsqu'il se rencontre quelques points d'inflexion entre ses limites. Tout ce qu'il peut résulter de l'existence de ces points, c'est qu'on obtienne accidentellement, par l'emploi de certaines formules, une approximation plus parfaite que celle que, généralement parlant, on serait en droit d'en attendre; et certes, on conviendra qu'il n'y a pas là un très-grave inconvénient.

J. D. G.

» n.° 10; *ce qui, au premier abord, présente un vrai paradoxe.*
» Mais il faut remarquer que, par l'emploi de la formule n.° 8,
» il a pu s'opérer entre les aires des deux branches de la courbe
» une compensation d'erreurs qui a pu ne pas avoir lieu d'une
» manière aussi avantageuse dans l'application des formules n.° 9
» et 10 (*). Au reste, dans la courbe même qui n'a pas d'inflexion,
» les résultats successivement obtenus par les diverses formules, ne
» semblent pas présenter un accroissement régulier d'approximation
» qui permette l'application de la méthode de M. d'Obenheim,
» comme M. Kramp l'avait espéré ».

12. Jamais je n'avais espéré une application de la méthode de M. d'Obenheim, tant aux cas qui ne semblent pas présenter un accroissement régulier d'approximation qu'à ceux qui en présentent un; et du moment que j'avais trouvé ma seconde méthode, exposée dans mon *Deuxième recueil de formules, etc.* (tom. VI, pag. 372), j'avais parfaitement renoncé à l'autre, à laquelle je ne reviendrai plus (**). Jamais non plus je n'ai tiré un vrai paradoxe de ce que la formule n.° 8 m'a donné plus d'exactitude que les formules n.° 9 et n.° 10; jamais la série des erreurs, telle qu'elle s'était présentée à moi, dans le calcul que j'ai pris la peine d'en faire, ne m'avait paru paradoxale; et jamais je n'ai rien trouvé là dedans

(*) Nous en demandons bien pardon à M. Kramp, dont la méthode nous paraît, au surplus, préférable à celle de M. Bérard; mais tout ce qui précède nous paraît assez exact. Ce ne sont point les résultats n.° 9 et n.° 10 qui sont trop peu approchés; c'est le résultat n.° 8 qui l'est plus que ne le comporte la formule sur laquelle il est calculé.

(**) On doit peut-être regretter que M. Kramp, qui était si bien en état de tirer parti de l'idée de M. d'Obenheim, l'ait si vite abandonnée; cette idée nous a toujours paru extrêmement ingénieuse et originale; mais nous pensons qu'on ne doit l'appliquer qu'aux approximations faites à l'aide des trapèzes, et avec la précaution encore d'éviter les points d'inflexion.

J. D. G.

qui fût contraire aux principes (*) Enfin, s'il faut le dire, il y avait encore assez loin des formules de M. d'Obenheim aux méthodes consignées dans mon premier mémoire. Voici, en effet, de quelle manière s'exprime ce professeur, dans sa *Balistique* : « Je suppose que l'on partage en un nombre de parties divisibles » par 24 (c'est le seul nombre auquel M. d'Obenheim ait fait l'ap- » plication de sa méthode) l'abscisse à laquelle correspond la surface » qu'on veut quarrer : que a représente la somme des trapèzes rec- » tilignes, larges de Dx seulement ; et que b, d, f, g, h, k » représentent respectivement celles des trapèzes larges de 2, 3, » 4, 6, 8 et 12Dx ; on aura, d'après l'équation précédente....... » De ces *sept* équations on tire rigoureusement

$$252252000A = 319108464a - 18157797b$$

$$-80520944d + 33322968f - 2467107g$$

$$-33696h + 112k.$$

» Ce calcul, dont je garantis l'exactitude, se trouve fait une » fois pour toutes, et peut être d'un fréquent usage ». Il y a sans doute prodigieusement loin de cette première esquisse, très-imparfaite, jusqu'aux méthodes ~~très-générales de mon~~ premier mémoire. Il y a, de plus, une faute d'impression d'une unité dans le septième chiffre de l'un des nombres de la formule précédente ; la somme de ces nombres étant 253252000 et nullement 252252000,

---

(***) De telles anomalies, dans le cas de l'emploi unique des trapèzes rectilignes, seraient pourtant tout-à-fait inexplicables et paradoxales, sans l'existence d'un point d'inflexion entre les limites de l'intégrale.

J. D. G.

comme elle devrait l'être ; ce qui me fait présumer que M. d'Obenheim n'a jamais fait l'application de sa formule à aucun exemple numérique quelconque. Enfin, ce qu'il y a de très-singulier, c'est qu'en suivant même les préceptes de M. d'Obenheim, je trouve des nombres entièrement différens des siens ; j'obtiens, en effet,

$$252252000A=42467328a'-249080832b'$$

$$+95420416c'-19459440d'+732160e'$$

$$-33696f'+112g' ;$$

M. Bérard, comme l'on voit, n'a jamais connu la *Balistique* de M. d'Obenheim, autrement que par ce que j'en ai dit dans mon premier mémoire.

QUESTIONS

QUESTIONS RÉSOLUES.

Observations sur les deux théorèmes de géométrie énoncés aux pages 250 et 320 du IV.e volume des Annales ;

Par M. J. B. Durrande.

M. Servois, dans un article inséré à la page 150 du IV.e volume de ce recueil, fait mention d'un beau théorème de géométrie plane, qu'il attribue à Simson, et dont M. Gergonne donne une démonstration analitique dans une note du même article. On a proposé ensuite à la page 320 du même volume, un autre théorème qui est exactement dans la géométrie à trois dimensions ce qu'est le premier dans la géométrie plane. J'ai cherché à ramener la démonstration de ces deux théorèmes à la belle théorie des transversales que MM. Carnot, Servois et Brianchon semblent s'être approprié, par les développemens importans qu'ils lui ont donnés et les nombreuses et intéressantes applications qu'ils en ont faites. J'ai réussi, en effet, à trouver une démonstration assez simple du premier de ces deux théorèmes ; mais, en examinant le second avec plus d'attention je n'ai pas tardé à en découvrir la fausseté ; ce qui prouve que, s'il peut souvent être très-utile de se laisser guider par l'analogie, on ne saurait néanmoins, sans imprudence, accorder constamment une confiance entière aux résultats qu'on en déduit. Je vais d'abord faire

connaître la démonstration que j'ai obtenue pour le premier des deux théorèmes ; je prouverai ensuite la fausseté du second.

THÉORÈME I. Les pieds des perpendiculaires abaissées sur les directions des côtés d'un triangle quelconque, de l'un quelconque des points de la circonférence du cercle circonscrit, sont tous trois sur une même ligne droite.

Démonstration. Soient ABC (fig. 4) le triangle dont il s'agit, P un point situé d'une manière quelconque sur la circonférence du cercle circonscrit, et Pc, Pa, Pb les perpendiculaires abaissées respectivement du point P sur les directions AB, BC, CA des côtés de ce triangle. Il s'agit de prouver que les trois points a, b, c appartiennent à une même ligne droite.

Pour y parvenir, soient d'abord menées les droites PA, PB, PC; on aura évidemment les proportions que voici ;

$$Ba : Ca :: PB\,Sin.BPa : PC\,Sin.CPa\ ;$$

$$Cb : Ab :: PC\,Sin.CPb : PA\,Sin.APb\ ,$$

$$Ac : Bc :: PA\,Sin.APc : PB\,Sin.BPc\ .$$

En multipliant ces trois proportions terme à terme, on obtiendra, par la suppression des facteurs communs,

$$Ba.Cb.Ac : Ca.Ab.Bc$$

$$:: Sin\,BPa.Sin.CPb.Sin.APc : Sin.CPa.Sin.APb.Sin.BPc.$$

Or, 1.° les angles BPa, APb sont égaux, comme ayant pour complémens PBC et PAC inscrits au même arc ; 2.° les angles CPb, BPc sont égaux, comme ayant pour complémens PCA et PBC mesurés par la moitié du même arc ABP ; 3.° enfin, APc et CPa sont égaux, comme ayant pour complémens PAB et PCB

inscrits au même arc ; donc les deux termes du second rapport de notre dernière proportion sont égaux ; et on a conséquemment l'équation

$$Ba.Cb.Ac=Ca.Ab.Bc\ ;$$

ce qui, par les théorèmes connus, prouve que a, b, c sont en ligne droite.

THÉORÈME II. Les pieds des perpendiculaires abaissées sur les plans des faces d'un tétraèdre de l'un quelconque des points de la surface de la sphère circonscrite peuvent n'être pas *tous quatre dans un même plan.*

Démonstration. Supposons, en effet, que le point dont il s'agit soit pris dans le plan de l'une des faces du tétraèdre ; il sera lui-même le pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan de cette face ; si donc les trois autres pouvaient être dans un même plan avec celui-là, ce plan devrait aussi contenir les trois perpendiculaires elles-mêmes ; les faces sur lesquelles elles tombent devraient donc être perpendiculaires à ce plan ; il devrait donc en être de même de leurs intersections deux à deux ; le tétraèdre aurait donc les trois arêtes d'un même angle parallèles entre elles ; ce qui est absurde.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Polyèdrographie.

On sait que, pour qu'un polyèdre convexe soit réputé régulier, il faut, à la fois, que toutes ses faces soient d'un même nombre de côtés et que tous ses angles solides soient d'un même nombre de faces.

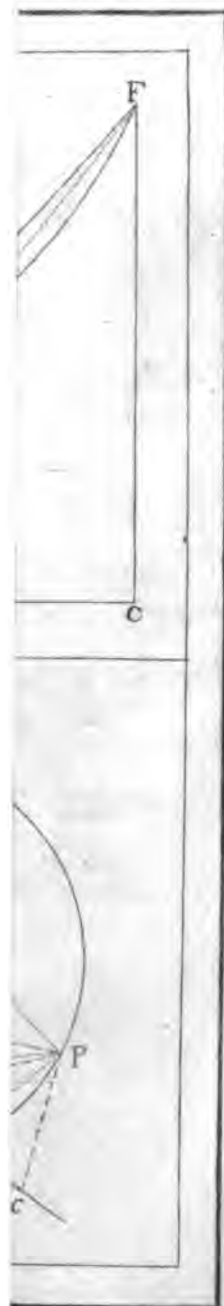
Mais on peut, en outre, concevoir,

1.° Des polyèdres terminés par deux sortes de polygones, en nombre égal de chaque sorte, et ayant d'ailleurs tous leurs angles solides d'un même nombre de faces;

2.° Des polyèdres ayant, au contraire, deux sortes d'angles solides, en nombre égal de chaque sorte, et ayant d'ailleurs toutes leurs faces d'un même nombre de côtés;

3.° Enfin, des polyèdres ayant, à la fois, deux sortes de faces, en nombre égal de chaque sorte, et deux sortes d'angles solides, aussi en nombre égal de chaque sorte.

On propose de faire l'énumération complète de tous ces divers polyèdres ?



1.229–257.
F
c
P
c
D. G. fecit.

ANALISE ALGÉBRIQUE.

Résolution des équations littérales, par une nouvelle méthode, directe et générale;

Par M. SUREMAIN DE MISSERY, ancien officier d'artillerie, membre de plusieurs sociétés savantes (*).

QUOIQUE notre méthode soit également applicable à des équations complètes, nous les supposerons, à l'ordinaire, dépourvues de leur second terme; ce qui simplifiera les calculs d'une manière notable. Et, attendu que l'équation du second degré, privée de son second terme, se résout immédiatement, nous passerons de suite à celle du troisième.

Résolution de l'équation du troisième degré.

1. Nommant a, b, c les racines de la proposée $x^3+px+q=0$; on a, par la théorie générale des équations,

(*) Ce qu'on va lire n'est que l'extrait d'un mémoire beaucoup plus étendu que l'auteur a bien voulu réduire à ce qu'il renfermait d'essentiel.

J. D. G.

$$a+b+c=0\ ,$$

$$ab+ac+bc=p\ ,$$

$$abc=-q\ ;$$

partant

$$\frac{-3(b+c)^2-(b-c)^2}{2^2}=p\ ;$$

$$\frac{(b+c)^3-(b+c)(b-c)^2}{2^3}=q\ ;$$

ou, en faisant $b+c=y$, $b-c=z$;

$$-3y^2-z^2=4p\ ;$$

$$y^3-yz^2=4q\ .$$

Eliminant y^6 entre le cube de la première équation et le quarré de la seconde, on obtient

$$-z^2(3^2.y^2-z^2)=4^2(27q^2+4p^3)\ ;$$

d'où l'on tire

$$\frac{3^2y^2z\sqrt{-3}-3z^3\sqrt{-3}}{2^3.3^3}=\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\ ;$$

ajoutant et retranchant enfin cette équation successivement à l'équation

$$\frac{3^3y^3-3^3yz^2}{2^3.3^3}=\tfrac{1}{2}q\ ;$$

le premier membre de l'équation résultante sera un cube parfait; et en conséquence, elle prendra cette forme

$$\left\{\frac{3y\pm z\sqrt{-3}}{2.3}\right\}^3=\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\ .\ (*)$$

On tire de là

$$\frac{3y+z\sqrt{-3}}{2.3}=m=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}\ ,$$

$$\frac{3y-z\sqrt{-3}}{2.3}=n=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}\ ;$$

ce qui donne

$$y=m+n$$

$$z=-(m-n)\sqrt{-3}\ ;$$

puis

$$b+c=m+n\ ,$$

$$b-c=-(m-n)\sqrt{-3}\ ;$$

ce qui donne ultérieurement

$$b=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}m+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}n\ ,$$

$$c=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}m-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}n\ ;$$

expressions qui, avec la suivante,

$$a=-(m+n)\ ,$$

(*) Il est difficile de penser que M. de Missery eût pu deviner toutes ces transformations, s'il n'eût connu, à l'avance, la forme des racines du 3.me degré. Le propre d'une bonne méthode paraît être cependant de ne présupposer aucune connaissance acquise sur ce qu'on cherche.

J. D. G.

sont les trois racines de la proposée, en y remettant pour m et n les quantités connues dont elles sont les symboles.

2. Comme, jusqu'à présent, on n'a pu parvenir à résoudre les équations du quatrième degré sans l'intermédiaire d'une réduite; nous allons, pour une plus grande uniformité, chercher la réduite qui répond à l'équation du troisième degré.

D'après ce qui précède, il est aisé de voir que

$$q=\frac{y^3-yz^2}{2^2}=2.\frac{3^3y^3-3^3yz^2}{2^3.3^3}=\left\{\frac{3y+z\sqrt{-3}}{2.3}\right\}^3+\left\{\frac{3y-z\sqrt{-3}}{2.3}\right\}^3;$$

$$p=\frac{-3y^2-z^2}{2^2}=-3\frac{3^2y^2+3z^2}{2^2.3^2}=-3\left\{\frac{3y+z\sqrt{-3}}{2.3}\right\}\left\{\frac{3y-z\sqrt{-3}}{2.3}\right\}.$$

d'où

$$-\tfrac{1}{27}p^3=\left\{\frac{3y+z\sqrt{-3}}{2.3}\right\}^3\left\{\frac{3y-z\sqrt{-3}}{2.3}\right\}^3;$$

faisant donc

$$\frac{3y+z\sqrt{-3}}{2.3}=s,\quad \frac{3y-z\sqrt{-3}}{2.3}=t,$$

on aura

$$s^3+t^3=q,\quad s^3t^3=-\tfrac{1}{27}p^3;$$

d'où la réduite

$$s^6-qs^3-\tfrac{1}{27}p^3=0;$$

et les valeurs

$$m^3=\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3};$$

$$n^3=\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3},$$

qui, toutes deux, sont les racines de la réduite, considérée comme équation du second degré. Après quoi le calcul s'achève comme ci-dessus, avec les deux équations qui donnent m et n, c'est-à-dire ici s et t, en fonction de y et z.

On a donc ainsi les racines de la proposée, en fonction des racines de la réduite.

3. On trouve, d'après ce qui précède,

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}=\pm\frac{(b-c)[2(b+c)^2+bc]\sqrt{-3}}{2.3^2}=\mp\frac{(b-c)(c-a)(a-b)\sqrt{-3}}{2.3^2}.$$

Cette expression remarquable, qui montre que $27q^2+4p^3$ doit être le dernier terme de l'équation aux quarrés des différences des racines de la proposée, prouve évidemment que, lorsque les trois racines a, b, c de la proposée sont réelles, leurs expressions, en fonetion des coefficiens, doivent être compliquées d'imaginaires; propriété qui est réciproque, ainsi que nous le dirons plus loin; elle montre aussi que l'équation $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3=0$ exprime la condition d'égalité entre denx racines de la proposée.

4. On trouve encore

$$s=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}=\qquad m=\frac{-3a+(b-c)\sqrt{-3}}{2.3};$$

$$s=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}m=\frac{-3b+(c-a)\sqrt{-3}}{2.3},$$

$$s=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}m=\frac{-3c+(a-b)\sqrt{-3}}{2.3};$$

et telles sont les expressions, très-symétriques, des trois racines cubiques de $s^3=\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$.

En y changeant le signe de $\sqrt{-3}$, ce qui changera aussi m en n, on aura les expressions analogues des trois racines cubes de $t^3=\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$.

On a donc les racines de la réduite en fonction des racines de

la proposée. Lagrange n'y est arrivé que par le calcul différentiel, et d'une manière plus longue (*).

5. De là il suit que l'expression de l'une quelconque des trois racines de la proposée les comprend toutes ; car l'expression

$$x=s+t$$

donne, par la substitution des valeurs de s et t, en fonction de a, b, c

$$x=a\;,\quad x=b\;,\quad x=c\;;$$

et il en serait de même de chacune des deux autres expressions

$$x=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}s+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}t\;,$$

$$x=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}s-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}t\;;$$

pourvu qu'on eût soin de ne combiner ensemble que des valeurs de s et t telles que $st=-\frac{1}{3}p$, ainsi que cela doit être (2).

6. Comme on a $s^3t^3=-\frac{1}{27}p^3$, ce qui donne

$$st=-\tfrac{1}{3}p\;,\quad st=-\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.\tfrac{1}{3}p\;,\quad st=-\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.\tfrac{1}{3}p\;;$$

il s'ensuit que la méthode résout, non seulement l'équation proposée

$$x^3+px+q=0\;,$$

dont les racines sont

$$x=a\;,\; x=b\;,\; x=c\;;$$

mais encore l'équation conjuguée

(*) Ce n'est presque pas la peine de dire que Lagrange se sert du calcul différentiel en cet endroit ; il ne l'emploie que par pure élégance ; et l'usage qu'il en fait pourrait facilement être suppléé par le théorème des racines égales.

J. D. G.

$$x^3+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}px+q=0\,,$$

dont les racines sont

$$x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}a\,,\quad x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}b\,,\quad x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}c\,;$$

et pareillement l'équation conjuguée

$$x^3+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}px+q=0\,,$$

dont les racines sont

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\,,\quad x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}b\,,\quad x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}c\,.$$

7. Si les racines de la proposée se présentent toutes sous une forme embarrassée d'imaginaires, ce qui arrive lorsque $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ est négatif, c'est-à-dire, lorsque les racines de la réduite, considérée comme équation du second degré, sont imaginaires; on sait que les premières sont toutes réelles : en voici une démonstration directe et rigoureuse.

D'après la théorie générale des équations, l'équation du troisième degré, à titre d'équation d'un degré impair, doit avoir au moins une racine réelle; ce que je pourrais d'ailleurs démontrer par mes formules.

Une des trois racines a, b, c, est donc réelle; mais, lorsque $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ est négatif, une de ces racines ne peut être réelle, sans que les deux autres ne le soient aussi.

En effet, si a est réelle, $b+c=-a$ est aussi réel. D'ailleurs, $q=(b+c)bc$ est réel; donc, puisque $b+c$ est réel, bc doit l'être pareillement. De plus, on a

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}=\frac{(b-c)[2(b+c)+bc]\sqrt{-3}}{2.3^2}\,,$$

d'où

$$\sqrt{-(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}=-\frac{(b-c)[2(b+c)+bc]}{2.3};$$

or, le premier membre de cette équation est réel; donc le second l'est aussi; mais le facteur $2(b+c)+bc$ est réel, puisque $b+c$ et bc le sont; donc l'autre facteur $b-c$ l'est de même; et, puisque $b+c$ et $b-c$ sont réels, b et c le sont nécessairement; donc enfin les trois racines a, b, c sont réelles.

Je ne crois pas que la réalité des trois racines, dans le *cas irréductible*, ait jamais été si complètement ni si directement démontrée.

Résolution de l'équation du quatrième degré.

1. Nommant a, b, c, d, les racines de la proposée $x^4+px^2+qx+r=0$, on a, par la théorie générale des équations,

$$a+b+c+d=0,$$

$$ab+ac+bc+ad+bd+cd=p;$$

$$abc+abd+acd+bcd=-q,$$

$$abcd=r;$$

partant

$$\frac{-2(a+b)^2-(a-b)^2-(c-d)^2}{2^2}=p,$$

$$\frac{(a+b)(a-b)^2-(a+b)(c-d)^2}{2^2}=-q,$$

$$\frac{[(a+b)^2-(a-b)^2][(a+b)^2-(c-d)^2]}{2^4}=r.$$

En faisant

$$a+b=y; \quad a-b=z, \quad c-d=z',$$

ces équations deviennent

$-2y^2$

$$-2y^2-z^2-z'^2=4p\ ,$$

$$yz^2-yz'^2=-4q\ ,$$

$$(y^2-z^2)(y^2-z'^2)=16r\ ;$$

ce qui donne

$$z^2=-y^2-2p-\frac{2q}{y}\ ,$$

$$z'^2=-y^2-2p+\frac{2q}{y}\ ,$$

$$\left(y^2+p+\frac{q}{y}\right)\left(y^2+p-\frac{q}{y}\right)=4r\ ;$$

d'où la réduite

$$y^6+2py^4+(p^2-4r)y^2-q^2=0\ ;$$

et les valeurs

$$l^2=-\tfrac{2}{3}p+\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\ ,$$

$$m^2=-\tfrac{2}{3}p+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\ ,$$

$$n^2=-\tfrac{2}{3}p+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\ ;$$

pour les trois racines de cette réduite, considérée comme équation du troisième degré ; valeurs dans lesquelles A et B désignent des fonctions connues des coefficiens de cette même réduite.

Cela posé, on a

$$a+b=y\ ,\quad a-b=\sqrt{-y^2-2p-\frac{2q}{y}}\ ,$$

$$c+d=-y\ ,\quad c-d=\sqrt{-y^2-2p+\frac{2q}{y}}\ ;$$

donc

$$a=+\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}\sqrt{-y^2-2p-\frac{2q}{y}},$$

$$b=+\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{2}\sqrt{-y^2-2p-\frac{2q}{y}},$$

$$c=-\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}\sqrt{-y^2-2p+\frac{2q}{y}},$$

$$d=-\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{2}\sqrt{-y^2-2p+\frac{2q}{y}};$$

expressions qui donneront les quatre racines de la proposée, si l'on y met pour y une des six valeurs connues représentées par $\pm l$, $\pm m$, $\pm n$, n'importe laquelle.

2. Mais, pour exprimer les racines de la proposée, en fonction de celles de la réduite, nous observerons que cette réduite, d'après la théorie des équations, donne

$$l^2+m^2+n^2=-2p,$$

$$l^2m^2n^2=q^2;$$

et que, de cette dernière équation, on tire

$$\pm lmn=q;$$

le signe supérieur ou le signe inférieur ayant lieu, suivant que q est positif ou négatif; car nous supposons l, m, n les racines positives de l^2, m^2, n^2.

Nous prendrons d'abord q positif, parce que, s'il était négatif, les racines de la proposée seraient les mêmes aux signes près.

Substituant donc ces valeurs de $-2p$ et de $+q$ dans celles de a, b, c, d, et prenant arbitrairement $y=l$, ces dernières deviendront

$$a=\frac{+l+m-n}{2},$$

$$b=\frac{+l-m+n}{2},$$

$$c=\frac{-l+m+n}{2},$$

$$d=\frac{-l-m-n}{2};$$

formules qui donneront les racines de la proposée, lorsque q est positif.

Et par conséquent les doubles formules

$$a=\pm\frac{+l+m-n}{2},$$

$$b=\pm\frac{+l-m+n}{2},$$

$$c=\pm\frac{-l+m+n}{2},$$

$$d=\pm\frac{-l-m-n}{2},$$

prises avec le signe supérieur ou avec l'inférieur, donneront respectivement les racines de la proposée, suivant que q sera positif ou négatif.

On a donc les racines de la proposée, en fonction des racines de la réduite.

3. On trouvera

$$y=\pm l=a+b=-(c+d),$$

$$y=\pm m=a+c=-(b+d),$$

$$y=\pm n=b+c=-(a+d).$$

d'où

$$l=\pm(a+b)=\mp(c+d)\ ,\quad l=\mp(a+b)=\pm(c+d)\ ;$$
$$m=\pm(a+c)=\mp(b+d)\ ,\quad m=\mp(a+c)=\pm(b+d)\ ,$$
$$n=\pm(b+c)=\mp(a+d)\ ,\quad n=\mp(b+c)=\pm(a+d)\ .$$

On a donc les racines de la réduite, en fonction des racines de la proposée.

4. Observons que la première expression

$$x=\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}\sqrt{-y^2-2p-\frac{2q}{y}}\ ,$$

des quatre racines de la proposée, comprend tacitement

$$x=\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{2}\sqrt{-y^2-2p-\frac{2q}{y}}\ .$$

Or si, dans la formule

$$x=\tfrac{1}{2}y\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-y^2-2p-\frac{2q}{y}}\ ,$$

on substitue les valeurs de $-2p$ et de q, comme on l'a fait (Art. 2); et que, de plus, on prenne successivement pour y les six valeurs

$$y=\pm l\ ,\quad y=\pm m\ ;\quad y=\pm n\ ,$$

on trouvera

$$x=a\ ,\quad x=b\ ,\quad x=c\ ,\quad x=d\ ;$$

d'où l'on voit que la première des quatre formules des racines de la proposée les comprend toutes; et il en est de même de chacune des trois autres. Ainsi, une quelconque des expressions des quatre racines de la proposée les comprend toutes.

5. Comme on a $lmn=\pm q$, il est aisé de voir que la méthode résout, non seulement l'équation proposée

$$x^4+px^2+qx+r=0\ ,$$

dont les racines sont

$$x=a\ ,\quad x=b\ ,\quad x=c\ ,\quad x=d\ ;$$

mais encore l'équation conjuguée

$$x^4+px^2-qx+r=0\ ,$$

dont les racines sont

$$x=-a\ ;\quad x=-b\ ,\quad x=-c\ ;\quad x=-d\ :$$

6. Si les racines de la proposée se présentent sous une forme embarrassée d'imaginaires, ce qui arrive si les racines de la réduite, considérée comme équation du troisième degré, sont, ou toutes trois réelles et positives, ou toutes trois réelles et une seule positive ; on sait que, dans le premier cas, elles sont toutes réelles, et, dans le second, toutes imaginaires (*). Voici une démonstration directe et rigoureuse de la réalité des racines dans le premier cas.

Si les racines l^2, m^2, n^2, de la réduite, considérée comme équation du troisième degré, sont réelles et positives, les racines l, m, n de cette même réduite, considérée comme équation du sixième degré, sont aussi réelles. Donc, puisqu'on a

$$a=\pm\frac{+l+m-n}{2},\ b=\pm\frac{+l-m+n}{2},\ c=\pm\frac{-l+m+n}{2},\ d=\pm\frac{-l-m-n}{2}$$

les racines a, b, c, d de la proposée sont toutes réelles.

Cette démonstration de la réalité des quatre racines, dans le *cas irréductible*, est très-simple et déjà connue. Je ne l'ai reproduite ici que pour conserver l'analogie entre le troisième et le quatrième degré.

(*) Cependant, deux d'entre elles deviendront réelles, si l'on a $l=m$, ou $l=n$, ou $m=n$.

(*Note de l'auteur.*)

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

Essai d'application de l'analise mathématique à la circulation du sang ;

Deuxième mémoire (*) ;

En réponse à KURT SPRENGEL ;

Par M. le professeur CHRETIEN KRAMP, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg, chevalier de l'Ordre royal de la légion d'honneur.



1. LE grand objet de la force vitale des vaisseaux, c'est de maintenir, au milieu des causes sans nombre qui résistent à la masse sanguine, une uniformité rigoureusement exacte dans le mouvement du sang. Imaginons une masse quelconque, lancée par une force de projection quelconque, et qui, après avoir éprouvé à chaque instant l'effet des forces accélératrices et retardatrices qui auront pu agir sur elle, ait acquis, au bout du temps t, la vitesse u. Désignant par P la somme des forces accélératrices et par Q la somme des forces retardatrices qui agissent sur cette masse dans l'instant dt ; on devra avoir nécessairement $du=(P-Q)dt$; équation qui ne repose sur aucune hypothèse, et qui, par sa simplicité et sa géné-

(*) Consulter, pour le *premier mémoire*, la page 77 du III.e volume du présent recueil.

ralité, est applicable à toutes les suppositions de mouvement quelconques.

2. La véritable vitesse du sang, à l'époque *t*, sera donc égale à l'intégrale de $(P-Q)dt$, qui sera elle-même une certaine fonction du temps *t*, inconnue encore aux médecins, aussi bien qu'aux géomètres, plus une *constante arbitraire*, c'est-à-dire, une quantité entièrement indépendante du temps *t*. C'est en conséquence d'un principe fort naturel, qu'une quantité variable quelconque est égale à ce qu'elle avait été dans un instant donné, *plus* les accroissemens qu'elle a reçus depuis cet instant. Dans le cas où la force accélératrice est exactement égale à la somme des résistances, on aura $P-Q=0$; ainsi l'intégrale sera égale à la *constante* seule; et cette *constante*, dans le cas actuel, n'est autre chose que la vitesse que l'onde de sang avait reçue du cœur. Cela ne doit surprendre personne. Deux forces égales et contraires, dont par conséquent l'effet réuni est *nul*, agissent à la fois sur un corps, en repos ou en mouvement : on demande ce qui en résultera ? ce sera la conservation de l'état actuel : le maintien du *status quo*. Reste à savoir quel est ce *status quo* ? si c'est l'état de repos, le corps naturellement restera en repos : si c'est, au contraire, l'état de mouvement, ce même mouvement persévèrera ; il sera maintenu, et nous présentera peut-être le seul exemple d'un mouvement rigoureusement uniforme.

3. Il faudrait être complètement étranger aux notions les plus simples et les plus élémentaires des mathématiques pour pouvoir, par exemple, avancer sérieusement la proposition suivante : *Si la force vitale des artères est égale à la somme des résistances, alors toute la masse sanguine restera immobile.* Ce serait confondre les deux états, entièrement différens, de $u=0$ et de $du=0$; ce serait prendre la variable *u* elle-même pour la différentielle de cette variable. Un corps quelconque, solide ou fluide, est en mouvement d'après une loi quelconque : une force quelconque vient alors agir sur lui : il faut déterminer le changement que cela produira dans l'état du mouvement actuel. Il est clair que ce changement sera

proportionnel à la force elle-même. Reste à savoir si cette force agit dans le sens même du mouvement du corps, ou dans un sens opposé, ou enfin dans une autre direction quelconque. Dans le premier cas, il faudra ajouter le changement à la vitesse même du corps; dans le second, il faudra, au contraire, l'en retrancher; et dans le troisième, enfin, il faudra déterminer, d'après les lois de la géométrie, l'influence que pourra avoir cette force sur l'état actuel du corps. Mais, dans tous les cas, cette même force sera proportionnelle, non à la vitesse actuelle du corps, mais à l'accroissement ou à la diminution que cette vitesse aura éprouvée, ou, plus généralement au changement qu'elle aura subi.

4. Un corps quelconque, solide ou fluide, est en mouvement, suivant une loi quelconque : deux forces rigoureusement égales, mais agissant dans des directions opposées, viennent agir sur lui : il faut déterminer le changement que cela produira dans son état actuel. Mais, si les deux forces sont égales, et qu'elles agissent dans des directions opposées, il est clair qu'elles n'en produiront pas : le corps persistera dans l'état de repos ou de mouvement qu'il avait d'abord. Dans l'état de santé, d'après l'idée que nous devons nous en faire, des causes retardatrices agissent sur l'onde de sang sortie du cœur : elles sont nombreuses et evidentes : opposons-leur des causes accélératrices qui leur soient égales et contraires, et le mouvement du sang continuera, tel qu'il aurait eu lieu sans l'existence d'aucune de ces deux causes; c'est-à-dire qu'il sera uniforme.

5. Mais que restera-t-il donc du mouvement du corps, dans le cas où les causes retardatrices seront égales aux accélératrices? ce qui en restera? Il restera toute cette vitesse que l'onde de sang avait immédiatement reçue du cœur, et qui, depuis sa sortie du ventricule gauche, jusqu'à sa rentrée par l'oreillette droite, n'aura pas reçu la moindre atteinte. Cette vitesse est certainement très-médiocre : mettons cinq à six pieds par seconde, pour une veine telle que la brachiale ou la médiane, et nous aurons le mouvement du sang, tel

tel qu'il paraît être dans une bonne saignée. Avec cette vitesse, le sang parcourt tout le système vasculaire du corps; pénètre dans les plus petits vaisseaux, qui sont insensibles à la vue, et revient de là dans les grandes veines. Il n'est pas nécessaire que la vitesse du sang soit excessive; une vitesse médiocre suffit; pourvu qu'elle conserve, pendant tout le trajet de l'onde, l'impulsion qu'elle avait reçue du cœur.

6. L'exemple d'un corps mû d'un mouvement uniforme, précisément à cause de l'égalité entre les forces accélératrices et retardatrices qui agissent sur lui, n'est rien moins que nouveau, dans l'histoire de la mécanique : cette science en est pleine, dans toutes ces applications. Les gouttes de pluie tombent d'abord d'un mouvement accéléré, conformément aux lois de la pesanteur; mais, en tombant, elles éprouvent de la part de l'air une résistance qui croît aussi avec leur vitesse; et dès que cette résistance sera devenue égale au poids de la goutte, son mouvement cessera de s'accélérer : il sera de lui-même devenu uniforme, à cause de l'égalité entre les forces accélératrices et retardatrices. Voulez-vous connaître la véritable vitesse avec laquelle la goutte de pluie continue de tomber, après être parvenue à l'uniformité? Convertissez-la en une colonne d'eau d'un poids égal : la hauteur de cette colonne sera celle d'où un corps grave serait obligé de tomber, pour acquérir, par sa chute, une vitesse égale à celle avec laquelle elle se meut réellement, et d'une manière très-uniforme. Personne n'a jamais dit que la goutte restera suspendue en l'air, précisément à cause de l'égalité entre son propre poids et la résistance de l'air, qui lui sera devenue rigoureusement égale.

7. Un vaisseau muni de voiles est sur mer; le vent en soufflant enfle les voiles, il fait prendre au vaisseau, dans les premiers instans, un mouvement uniformément accéléré. Mais ce vaisseau ne peut avancer à moins qu'il n'écarte l'eau qui est devant lui; et cette eau lui résiste proportionnellement au quarré de sa vitesse. Le choc du vent sur les voiles suit le même rapport : qu'en résultera-t-il? La

vitesse du vaisseau augmentera, jusqu'à ce que le poids du prisme d'air qui exprime le choc du vent sur les voiles soit égal à la résistance du prisme d'eau qui exprime celle de la partie antérieure du navire. Dès lors il n'y aura plus d'accélération ; le vaisseau sera mû d'un mouvement uniforme, avec une vitesse égale et constante. Quelle sera cette vitesse ? Ce sera celle qui rend l'impulsion du vent sur les voiles égale au choc de l'eau sur la partie antérieure du vaisseau. Il y aura une équation du premier degré à résoudre pour trouver la valeur de l'inconnue ; mais jamais il n'est venu dans la tête de personne de prétendre que le vaisseau restera immobile sur la surface de l'eau, uniquement parce que l'impulsion du vent sur les voiles est devenue égale au choc de l'eau sur la proue.

8. Le même vaisseau est encore muni de rames : on demande sa vitesse, après qu'il sera parvenu à l'état d'uniformité ? Dans les premiers instans, le mouvement sera uniformément accéléré, à cause de l'impulsion, toujours persistante, du vent sur les voiles ; mais bientôt cet état de choses changera. D'un côté, à mesure que le vaisseau avance, il échappe en partie à l'action du vent, laquelle par conséquent devient une fonction de la vitesse même du vaisseau. D'un autre côté, la résistance de l'eau sur la surface antérieure retarde le mouvement du navire, et son action sur la surface des rames l'accélèrera. Reste donc à savoir quelle doit être la vitesse du vaisseau, pour que le choc du vent sur les voiles soit égal à la résistance de l'eau sur la partie antérieure, moins son action sur la surface des rames ; et ce sera là l'inconnue du problème. Le vaisseau sera mû ainsi d'un mouvement uniforme ; et personne ne s'est jamais avisé de dire que ce soit là une raison pour le maintenir dans une immobilité parfaite sur la surface de la mer.

9. En général, nous pouvons affirmer que, dans la multiplicité des causes qui s'opposent à la conservation du mouvement, il n'est et il ne peut exister aucun exemple d'un mouvement rigoureusement uniforme, à moins qu'il ne soit produit par cette égalité constante

entre les forces accélératrices et les forces retardatrices qu'on rencontre partout. L'ignorance seule peut dire que le mouvement ne peut avoir lieu qu'autant que les premières l'emportent sur les autres. D'un pareil état de choses, il ne saurait résulter qu'un mouvement accéléré. Les auteurs d'une pareille proposition ne tiennent pas compte du mouvement actuel qui existe encore. Tant que ce mouvement n'est pas détruit par une cause étrangère, ou tant qu'il n'est pas augmenté par une cause également étrangère, il ne peut cesser d'être le même. Enfin, si ce mouvement est affecté, à la fois, par deux causes étrangères, égales et directement opposées, dont l'une par conséquent tend à l'augmenter, tandis que l'autre tend à le diminuer, et qui par conséquent se détruisent, le mouvement reste tel qu'il est; il n'est ni augmenté ni diminué; il est rigoureusement uniforme; et la vitesse une fois acquise demeure constamment la même.

10. Tout ce que je viens de dire parut pour la première fois dans mon ouvrage : *De vi vitali arteriarum diatribe. Adita nova de febrium indole generali conjectura. Argentorati*, 1785. Des trois cas possibles que présente l'équation générale $du=(P-Q)dt$, savoir : $P=Q$, $P>Q$, $P<Q$, le premier était essentiel à l'état de santé; les deux autres désignaient la fièvre, savoir : $P>Q$ le *Synothus*, et $P<Q$ le *Typhus*. Cet ouvrage eut le sort de tous ceux qui choquent les idées reçues, et qui cependant ne sont pas appuyés par des démonstrations d'une évidence suffisante. C'était des propositions générales de mécanique, que je supposais connues de tout le monde; et c'était la véritable raison pour laquelle je donnais tout l'ensemble de ma *Pyrétologie* sous une forme aphoristique; en la bornant à *trente-trois* thèses, dont il me paraissait fort inutile de donner les démonstrations. Je supposais que ces démonstrations s'offriraient d'elles-mêmes : j'avais mal jugé de mes lecteurs. Les plus célèbres journaux de l'Allemagne en parlèrent avec une indifférence très-marquée : aucun ne jugea nécessaire de dire un mot seulement de mes thèses, qui renfermaient pourtant la partie nouvelle et véritablement essentielle

de mon système. Je dois en excepter toutefois la *Gazette littéraire de Tubingue*, qui donna, quatre années après, un exposé très-détaillé de mon ouvrage, et sur-tout des thèses, qu'elle honora d'une critique particulière et très-avantageuse. L'auteur de cette récension était entièrement au fait de tous les principes de mécanique qui conduisent à mes résultats; il se garda bien de tomber dans les bévues des autres; et il accorda à mes propositions toute l'importance qu'elles méritaient effectivement. Mais cette critique fut bientôt oubliée, et ne fit aucune impression sur le siècle.

11. Dix années après, en 1794, je publiai, à *Heidelberg*, ma *Fieberlehre nach mecanischen grundsäzzen* (Pyrétologie, d'après les principes de mécanique), dans laquelle je développai tout mon système. Cet essai fut encore plus malheureux que le précédent: très-peu de journalistes daignèrent en faire mention: tous furent généralement révoltés de la proposition: *Si la force vitale des artères est égale à la somme des résistances, le mouvement du sang sera uniforme:* ils ne comprenaient pas ce que cela voulait dire; et, comme c'est là la proposition fondamentale de mon système, il est inutile de faire observer qu'ils ne comprenaient rien à tout le reste non plus. Ne voulant pas effaroucher mes lecteurs, j'avais évité de donner, à ce que j'écrivais, cette forme mathématique qui lui était propre. Je sentais alors l'impossibilité de leur faire entrer dans la tête cette égalité entre les forces accélératrices et retardatrices, à moins que d'ôter en même temps toute idée de mouvement quelconque. En conséquence, je résolus de donner, à la première occasion, mon système, revêtu de tout l'appareil mathématique propre à le rendre intelligible aux géomètres; en laissant ensuite à ces derniers le soin de le faire comprendre aux autres.

12. Cette occasion se présenta bientôt. L'an 1794, je donnai au public ma *Kritik des pratischen Arzeneikunde* (Critique de la médecine pratique). Le septième chapitre de cet ouvrage est entièrement destiné à l'exposition de mon système; et à la suite,

je donnai, en moindres caractères, et en forme de notes, les démonstrations mathématiques qui lui servaient d'appui. La fausse base sur laquelle cela était établi gâtait tout. Dès que l'uniformité du mouvement du sang ne peut être maintenue que sous la condition exclusive que la force vitale des vaisseaux et la somme des résistances, c'est-à-dire, que les forces accélératrices et retardatrices de la masse sanguine soient rigoureusement égales entre elles ; voilà ce qui fait vraiment dresser les cheveux, et ce qui révolte le sens commun. Et que restera-t-il donc, dans le cas d'une égalité parfaite entre ces deux forces opposées? Et faut-il donc le dire cent fois? Il restera toute la force du cœur, ainsi que toute la vitesse qu'il aura communiquée à l'onde sanguine, et qui est très-indépendante de la force vitale des vaisseaux. Supposons que cette force vitale soit un peu plus grande que la somme des résistances; dans ce cas, il restera donc quelque chose de la première, après en avoir retranché la seconde; et ce quelque chose, ajouté à la vitesse que le sang aura reçue immédiatement du cœur, produira un mouvement *accéléré*. Supposons, au contraire, que la somme des résistances soit un peu plus grande que la force vitale des vaisseaux; dans ce second cas, il restera quelque chose de la première après en avoir retranché l'autre toute entière; et ce quelque chose, ôté de la vitesse que le sang aura immédiatement reçue du cœur, produira un mouvement *retardé*. L'un et l'autre des deux états est un état de maladie, incompatible avec l'uniformité du mouvement du sang, qui est une conséquence d'une égalité parfaite entre la force vitale des vaisseaux et la somme des résistances. Mais enfin l'un et l'autre doivent produire les deux états parfaitement opposés, et qu'on ne pourra mieux désigner que par les dénominations de *fièvre positive* et de *fièvre négative*.

13. Peu de temps après avoir écrit cet ouvrage, j'eus la place de professeur de mathématiques, de physique et de chimie à l'école centrale de Cologne; et, après y être resté douze ans, j'acceptai celle de doyen de la faculté des sciences et de professeur de ma-

thématiques à Strasbourg. C'est donc depuis vingt années, à peu près, que j'ai pu regarder ma carrière de médecin comme complètement terminée. Ce fut en 1812 pourtant que je mis au jour mon *Essai d'une application de l'analise algébrique à la circulation du sang*, que je destinais aux *Annales de mathématiques* de M. le professeur Gergonne, dans le troisième volume desquelles cet essai occupe en effet dix-sept pages. C'était là le dernier de mes ouvrages sur ce sujet; et je ne songeais plus dès lors à reprendre la plume pour écrire ni sur la circulation du sang ni sur l'analise des fièvres, ni sur aucune matière de médecine quelconque.

14. Ce fut au mois d'avril de cette année, qu'un de mes collègues me rendit attentif sur quelques passages de l'*Histoire pragmatique de la médecine*, par KURT SPRENGEL, où j'étais cité, et qui pouvaient m'être très-préjudiciables. Voici le texte de ces passages, tels qu'ils se trouvent dans la traduction française du sixième volume de cet ouvrage.

(*Page* 140) « Prenant pour guide les précieux travaux de » *Gauthier Verschuir* sur cette matière, *Chrétien Kramp* accorda » la contractilité aux artères; mais par une *bizarrerie inexplicable*, » il prétendit qne cette force est différente de l'irritabilité ».

(*Page* 279) « Si quelques chimistes nous ont rappelé les théories » du XVII.e siècle, la lecture de la pyrétologie d'un géomètre semble » nous reporter au temps des iatromathématiciens. *Chrétien Kramp* » croyait pouvoir expliquer les développemens de la fièvre, en » admettant toujours la prépondérance de la force vitale sur la » lenteur et les obstacles de la circulation du sang, sans réfléchir » que cette prépondéranee est absolument indispensable pour que » la circulation s'effectue, et que, lorsque la force vitale n'est pas » supérieure à l'obstacle, il s'ensuit un repos parfait ».

(*Page* 336) » L'essai que fit un fanatique, *Chrétien Kramp*, » de donner une certitude mathématique à la médecine, est si » pitoyable, qu'à l'exception de quelques fragmens, extraits d'*Hyp-* » *pocrate* et de *Galien*, ce livre ne contient rien de plus que la

» pyrétologie de l'auteur, et que son traité de la force vitale des » vaisseaux. La médiocrité de cet essai est d'autant plus évi- » dente que *Chrétien Kramp* cherche à la cacher sous un vain » étalage de formules algébriques et de mots imposans ».

15. *Premièrement.* Ce n'est pas une *bizarrerie inexplicable* de dire que la contractilité des artères est différente de l'irritabilité. L'*irritabilité* est la faculté qu'a la fibre de se contracter, par la présence d'un *stimulus* quelconque, quand même il n'agirait que par le simple contact. Sous le nom de *contractilité* des artères, j'entends la faculté d'entrer dans une contraction plus forte que la dilatation qui l'avait précédée; et voilà ce qui fait différer cette *contractilité* de la simple *élasticité.* Cette dernière donnera, tout au plus, une contraction égale à la dilatation; ce qui ne suffirait pas pour faire entrer un fluide visqueux et coaguleux dans les plus petits rameaux artériels, et le faire rentrer ensuite par les veines, sans la moindre apparence d'une perte de mouvement quelconque. Mais, en supposant une contraction plus forte que la dilatation, une réaction plus forte que l'action qui l'avait précédée, on aura quelque chose qui pourra distinguer la fibre *morte* de la fibre *vivante.* Par des raisons analogues, la contractilité des artères sera différente de l'irritabilité; ce n'est point en effet la même chose de se contracter, en présence d'un *stimulus* quelconque, quand même il n'agirait que par le simple contact, ou d'entrer dans une contraction plus forte que la dilatation qui l'avait précédée. L'irritabilité suppose une artère qui, semblable au cœur, se vide entièrement à la fin de chaque contraction, ce qui contredit formellement la nature des artères, lesquelles restent toujours pleines; la contractilité suppose précisément qu'elles sont pleines, sans quoi elle ne pourrait guère se manifester. *Kurt Sprengel*, comme on voit, n'y regarde pas de si près; pourvu qu'une fibre ait la faculté de se contracter, quel que soit le *stimulus* qui l'irrite, quel que soit le temps que cette contraction dure, il suffira pour lui de la croire inévitable.

16. *Secondement. Kurt Sprengel* me reproche que j'ai toujours

admis *la prépondérance de la force vitale des vaisseaux sur les obstacles à la circulation du sang*; il ajoute que *cette prépondérance est indispensable pour que la circulation s'effectue;* et que, *tant que la force vitale n'est pas supérieure à l'obstacle, il s'ensuit un repos parfait.* Il n'est pas vrai que j'aie dit l'un, ce qui contredirait formellement mon système; et quant à l'autre, il est très-faux que, tant que la force vitale n'est pas supérieure à l'obstacle, il s'ensuive un repos parfait. Il s'ensuivra une uniformité dans le mouvement actuel, auquel il ne sera rien ajouté, dont on ne retranchera rien non plus, et qui, par conséquent, restera tel qu'il avait été. Et, pour qu'il reste tel, il faut que la force vitale des vaisseaux soit *rigoureusement* égale à la somme des résistances; sans quoi le mouvement serait accéléré, on bien il serait retardé, suivant que la force vitale serait plus grande ou plus petite que la somme des résistances. *Kurt Sprengel* a-t-il donc oublié que l'onde de sang en question n'était pas en repos, mais en mouvement; et qu'en conservant ce mouvement, on avait complètement rempli toutes les conditions du problème. Et comment le conservera-t-on? Une suite nombreuse d'obstacles concourent à le diminuer: cela est évident. Supposez une force quelconque faisant équilibre à toutes ces résistances, et que vous nommerez *force vitale des artères*, et vous aurez votre mouvement conservé, et l'uniformité de ce mouvement maintenue. Cela a été dit cent fois; et, si *Kurt Sprengel*, par incapacité ou mauvaise foi, ne l'a pas compris ou a feint de ne pas le comprendre, ce n'est certainement pas ma faute.

17. *Troisièmement.* Les formules algébriques et les mots imposans dont le vain étalage ne doit servir qu'à cacher l'identité de mon dernier ouvrage avec ceux qui le précèdent sont la chose du monde la plus simple. Désignons par P la force vitale des artères, par Q la somme des résistances; nous aurons $du=(P-Q)dt$. Et telle sera l'équation différentielle entre le temps et la vitesse acquise dans toutes les suppositions possibles. Il est *très-probable* que *Kurt Sprengel* ne comprend rien à cette simplicité; il ignore complètement que

que l'accroissement de la vitesse *u* pendant l'élément de temps d*t*, est égal au produit de la multiplication de la force par cet élément; il n'a aucune idée d'une équation différentielle, dans sa plus grande simplicité possible; il ne sait pas seulement ce que veut dire du=o; encore moins sait-il ce que veulent dire les deux expressions analogues du>o, du<o. La première désigne le mouvement uniforme, la seconde le mouvement accéléré, et la troisième le mouvement retardé; mais c'est là ce dont *Kurt Sprengel* ne se doute aucunement. Un homme doué d'un peu plus de modestie aurait aperçu sur-le-champ qu'il était question là de choses tout-à-fait étrangères à ses études; il aurait demandé à l'auteur, ou bien à tout autre, des éclaircissemens sur une matière qui lui était parfaitement inconnue. *Kurt Sprengel* en veut aux géomètres, et à tous ceux qui s'écartent des anciens systèmes; il frémit à la seule idée que jamais la certitude mathématique vienne s'introduire dans la médecine; aussi, en feuilletant les sept volumes de son ouvrage on reconnaît l'homme partagé entre les idées des *solidaristes* et des *humoralistes* : c'est de la vieille médecine toute pure.

18. Depuis long-temps *Kurt Sprengel* m'en veut. Il s'était scandalisé, dans tous les temps, de la dénomination très-innocente : *force vitale des artères*. Il lui a fallu toute ma *critique* pour lui faire concevoir que j'entendais par là tout ce qui établit la différence entre cette force contractile des artères qui constitue leurs battemens alternatifs, et la simple élasticité. Il avait inculpé Galien, de ce que celui-ci, pendant l'accès de frisson, dans les fièvres quartes, recommandait *la saignée*. Le fait est très-faux; j'ai fait observer à *Kurt Sprengel* qu'il n'avait pas lu avec attention le passage en question. Dans un autre endroit, *Kurt Sprengel* avait revendiqué à *Cesalpinus* l'honneur d'avoir découvert la circulation du sang. Je lui ai fait voir que des passages tordus à volonté ne suffisent pas pour établir *Césalpinus* auteur d'une pareille découverte; et que, d'après d'autres passages, bien plus clairs et plus évidens, *Galien* méritait cet honneur avec bien plus de raison que *Andreas Cesalpinus*.

19. *Finalement.* Nous nous donnerons la peine d'expliquer enfin à *Kurt Sprengel* ce que nous entendons et ce qu'il faut nécessairement entendre par le mot *force*. Les forces, en général, sont de deux espèces; et il est visible qu'il ne peut y en avoir de troisième. La première espèce comprend celles qui communiquent, *dans un seul instant*, au corps qu'elles doivent frapper toute la vitesse que celui-ci peut recevoir par le choc, et qui ensuite n'agissent plus sur lui. La seconde comprend les forces qui agissent par un véritable contact, qui ne communiquent, pendant le premier instant, qu'une vitesse infiniment petite, une véritable différentielle de vitesse; mais qui ensuite restent en contact avec les corps et continuent d'agir. La force du cœur est de la première sorte : la force vitale des artères et la somme des résistances est la seconde. Dire que la force vitale des artères et la somme des résistances, sont égales entre elles, ou que l'une est le double, le triple, etc., de l'autre, cela est très-raisonnable, et cela peut être en effet. Dire que la force du cœur est égale, soit à la force vitale des artères, soit à la somme des résistances, ce serait là une sottise énorme, dont un homme tant soit peu versé dans les principes de la mécanique ne saurait jamais se rendre coupable. L'une des deux forces est une pression : l'autre est une percussion; et il est visible qu'étant ainsi d'une nature très-différente, elles ne sauraient admettre une mesure commune entre elles. Nous doutons, au reste, de l'intérêt quelconque que *Kurt Sprengel* pourra attacher à cette discussion. Il ne connaît que deux objets, dont il s'empresse de remplir ses ouvrages de la grossièreté et du savoir. Encore de ce savoir faudra-t-il retrancher tout ce qui tient aux sciences mathématiques, dans lesquelles il est et sera toujours complètement ignorant.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Réflexions nouvelles sur la question traitée à la page 143 de ce volume ;

Par M. Tédénat, correspondant de l'institut, recteur de l'académie de Nismes.

Au Rédacteur des Annales.

Monsieur,

En lisant le 5.e numéro du VII.e volume des *Annales*, j'ai pensé qu'on pourrait ajouter encore quelques observations à celles que vous avez eu la bonté d'y insérer, sur le problème proposé dans le n.° 3. Je les écris sans ordre, et comme elles se sont offertes à moi, dans quelques momens de loisir ou d'insomnie.

Il me semble d'abord que l'équation trouvée résout généralement le problème proposé dans le n.° 3 ; car, par la nature du calcul des variations, la fonction trouvée doit être un *maximum* ou un *minimum*, entre les deux limites $x=-a$ et $x=+a$. Mais, si a représente, comme nous l'avons supposé, la moitié de l'arète du

cube ; l'expression trouvée sera celle d'une surface terminée aux deux faces latérales du cube, et passant par les deux diagonales inverses des bases opposées.

Il est aisé de s'assurer que cette surface sera un *minimum* ; car il faut pour cela que

$$\tfrac{1}{2}\varpi'^2 f''(y') + \varpi'\zeta' f''(y', z') + \tfrac{1}{2}\zeta'^2 f''(z') ,$$

soit essentiellement *positive* pour le *minimum*, et *négative* pour le *maximum* (Voyez la *Théorie des fonctions analitiques*, deuxième édition, page 291). Or, dans le cas que nous examinons présentement, cette expression se réduit à

$$\frac{\varpi'^2+\zeta'^2+(\varpi' z'-\zeta' y')^2}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} ;$$

qui sera toujours positive, soit que l'on prenne les accroissemens ϖ' et ζ' en plus, soit qu'on prenne ces mêmes accroissemens en moins (*).

Reprenons les équations

(*) Il est ici essentiellement nécessaire de bien s'entendre. Puisque l'équation $y=x\,\text{Tang.}\,\frac{\pi z}{4a}$, trouvée par M. Tédenat, satisfait à l'équation différentielle

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0 ;$$

il est hors de doute que la surface qu'elle exprime jouit de la propriété du *minimum*, en ce sens qu'elle est telle que si l'on trace sur elle un polygone

$$y=x\,\text{Tang.}\,\frac{\varpi z}{4a}\,, \qquad (1)$$

$$y=\frac{xz}{a}\,; \qquad (2)$$

elles donnent; pour les surfaces gauches qu'elles représentent, des lignes droites pour les fibres horizontales; mais tandis que la der-

---

fermé quelconque, continu ou discontinu, la portion de surface comprise dans ce polygone sera d'une moindre étendue que toute autre surface terminée au même contour; mais cela ne nous semble prouver aucunement que cette surface soit celle qui résout le problème proposé. De quoi s'agit-il en effet? De trouver une surface qui, passant par les diagonales inverses de deux faces opposées d'un cube, ait sa partie interceptée entre les faces de ce cube, de la moindre étendue possible. Or, il paraît que ce problème est susceptible d'une infinité de solution: tout porte à croire qu'il doit être résolu par une équation différentielle partielle du premier ordre, dont l'équation de M. Tédenat ne serait alors qu'une intégrale particulière. Il y aurait donc lieu, dans ce cas, à chercher un *minimum minimorum*; et lui seul alors pourrait fournir la véritable solution du problème.

Concevons, en effet, que, sur deux faces opposées du cube, autres que celles qui contiennent nos diagonales inverses, on trace deux courbes quelconques, se terminant à ces diagonales, et formant avec elles un quadrilatère gauche mixtiligne. Entre toutes les surfaces passant par les côtés de ce quadrilatère, il s'en trouvera une dont l'étendue, terminée à son périmètre, sera la moindre possible; mais, comme deux des côtés du quadrilatère sont arbitraires, on pourra, en les variant à volonté, obtenir une infinité de surfaces, jouissant toutes de la propriété du *minimum*; c'est-à-dire, ayant toutes, en chacun de leurs points, leurs rayons de courbure égaux et de signes contraires; d'où il suit évidemment qu'entre toutes ces surfaces, il s'en trouvera une moindre que toutes les autres. C'est précisément celle-là qui résoudra la question proposée; et rien ne prouve que ce doive être celle de M. Tédenat.

Il resterait pourtant ici une ressource: ce serait celle de nier l'existence d'une

nière donne aussi des lignes droites, pour ses fibres verticales, l'autre donne, pour ces mêmes fibres, des courbes transcendantes.

Cette observation facilite le moyen de concevoir pourquoi la surface (1) est moindre que la surface (2), en les bornant du moins à l'intérieur du cube; car elles sont composées l'une et l'autre, dans les mêmes limites, d'un égal nombre de fibres rectilignes, partant deux à deux d'un même point de l'axe vertical z, pour aboutir au même plan, qui est une face latérale du cube. Or, la somme des fibres moins obliques, comprises entre deux plans parallèles, doit être moindre que celle des fibres plus obliques, comprises entre les mêmes plans.

Si l'on veut assujettir les surfaces à passer par les quatre *côtés* du parallélogramme gauche formé à la surface du cube par les diagonales inverses de deux couples de faces opposées: il me paraît évident que, s'il en existait une remplissant toutes les conditions du *minimum*, ce serait celle qui est donnée par l'équation (2) Mais, comme elle ne satisfait pas à l'équation différentielle générale de la la moindre surface, il en faut conclure qu'elle n'est point une surface *minimum*, telle qu'on doit l'entendre.

S'il en existait une autre, les expressions de x, y, z, devraient être telles qu'on les voit à la page 154; et l'on déterminerait la la forme particulière des fonctions, par la condition que la surface *minimum* doit passer par les quatre diagonales; or, il ne paraît pas qu'il soit possible de trouver une fonction régulière et continue qui puisse satisfaire à cette condition, et qui soit comprise dans les

---

surface *continue*, la moindre possible entre toutes celles qui peuvent se terminer au périmètre d'un même polygone gauche, rectiligne, mixtiligne ou curviligne. Mais cela reviendrait à nier la possibilité de tendre sur ce polygone une toile parfaitement élastique; ce qui ne paraît guère admissible.

J. D. G.

valeurs générales de x, y, z. Quant aux fonctions irrégulières et discontinues, la question serait trop difficile à examiner dans cette circonstance (*).

Agréez, etc.

Nismes, le 26 de mai 1817.

(*) En fait, on peut toujours concevoir une toile parfaitement et indéfiniment élastique, tendue sur le quadrilatère gauche formé par l'ensemble de nos quatre diagonales. Cette toile formera ainsi une certaine surface, laquelle paraît devoir être assujettie à la loi de continuité, et, comme telle, exprimable par une équation unique. Il résulte de plus des considérations que nous avons développées (pag. 143), qu'en tous ces points cette surface devra avoir ses deux rayons de courbure égaux et de signes contraires; elle devra donc satisfaire à l'équation différentielle

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0 ;$$

elle devra donc être différente de celle qu'exprime l'équation (2) qui n'y satisfait pas. Quelle sera donc cette surface? et sa recherche serait-elle au-dessus des forces actuelles de l'analise? Que sert donc d'être parvenu à intégrer généralement l'équation différentielle ci-dessus, si, dans les cas particuliers, on ne peut tirer aucun parti de son intégrale pour résoudre les problèmes qu'on se sera proposés? En un mot, à combien de conditions distinctes peut-on assujettir une surface *minimum*; et comment, à l'aide de ces conditions, peut-on parvenir à particulariser cette surface? C'est toujours là la question qu'il s'agirait de résoudre; et ce qui précède nous paraît laisser encore cette question entière.

J. D. G.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de dynamique.

FAIRE passer, par deux points donnés dans l'espace, les deux côtés d'un angle tel qu'un corps pesant parvienne du plus élevé de ces deux points au plus bas, en suivant les deux côtés de cet angle, en moins de temps qu'il ne le ferait en suivant les deux côtés de tout autre angle qui passerait par les deux mêmes points ; ou du même angle autrement situé par rapport à eux ?

Problèmes de Géométrie.

I. Inscrire à un cercle décrit sur une sphère un triangle sphérique dont les côtés passent par trois points donnés ?

II. Circonscrire à un cercle décrit sur une sphère un triangle sphérique dont les sommets soient sur trois arcs de grands cercles donnés ?

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan ;

Par M. Gergonne.

Il y a environ trois ans que l'académie de Turin voulut bien rendre public, par la voie de l'impression, un mémoire que je lui avais adressé, et où, dans le dessein de venger complètement la géométrie analitique du reproche qu'on ne lui fait que trop souvent de ne pouvoir rivaliser avec la géométrie pure, pour la construction des problèmes, j'essayais de prouver que cette géométrie analitique, convenablement maniée, offrait les solutions les plus directes, les plus élégantes et les plus simples de deux problèmes dès-long-temps célèbres, et qui passent pour difficiles : je veux parler du problème où il s'agit de *décrire un cercle qui touche trois cercles donnés* et de celui où il est question de *décrire une sphère qui touche quatre sphères données.*

J'écrivais pour des savans consommés, et je crus devoir être court ; il paraît que je le fus un peu trop ; plusieurs géomètres, qui eurent connaissance de mon mémoire, me firent le reproche, fondé sans doute, que le fil qui m'avait guidé n'y était pas assez apparent, et que mes calculs semblaient plutôt propres à légitimer une construction trouvée par un heureux hasard, qu'à faire découvrir cette construction. Il paraît même que, par suite de mon excessif laconisme,

beaucoup de géomètres n'ont pu suivre mes méthodes et en saisir l'esprit ; car on est revenu encore postérieurement sur ces deux problèmes, sur lesquels pourtant j'avais cru ne plus rien laisser à dire.

C'est ce qui me détermine aujourd'hui à reprendre le même sujet, dans la vue de le développer davantage, et de le mettre à la portée même des commençans. Je le fais d'autant plus volontiers que les méthodes que je mets en œuvre en cette rencontre me paraissent ouvrir un nouveau champ de spéculations et de recherches de nature à faire prendre à la géométrie analitique une face entièrement nouvelle. On verra, je pense, par ce qui va suivre, que tout, absolument tout, peut être motivé et justifié dans mes procédés ; et que, loin que mes calculs n'aient pour objet que de légitimer une construction graphique, découverte à l'avance, cette construction en est, au contraire, une conséquence toute naturelle, et, pour ainsi dire, absolument inévitable. On verra enfin que ces deux problèmes, sur lesquels tant d'illustres géomètres se sont tour à tour exercés, deviennent, par les méthodes que j'y applique, des problèmes de première facilité, qui peuvent aisément trouver place dans les traités même les plus élémentaires.

Au surplus, comme la marche des raisonnemens et des calculs est absolument la même pour ces deux problèmes, je ne m'occuperai uniquement ici que du premier : l'autre pourra offrir au lecteur un moyen de s'assurer s'il a bien saisi le procédé. Il pourra également s'exercer sur le problème où il s'agit de *trouver sur une sphère, un cercle qui en touche trois autres, donnés sur la même sphère* ; problème que j'ai traité par les mêmes méthodes, à la page 349 du IV.e volume de ce recueil.

Soient c, c', c'' trois cercles donnés de grandeur et de situation sur un même plan, et proposons-nous de trouver un quatrième cercle C qui touche à la fois ces trois-là.

Il se présente assez naturellement de chercher le centre et le

rayon du cercle demandé. Mais, comme on sait faire passer une circonférence par trois points donnés, il se présente aussi assez naturellement de chercher trois points de la circonférence de ce cercle. Nous allons même voir bientôt que ce dernier moyen de solution mérite la préférence sur le premier.

Parmi les points de la circonférence du cercle cherché, il y en a trois qui se font particulièrement remarquer : ce sont ceux t, t', t'' où cette circonférence doit être touchée par les trois cercles donnés ; voilà donc les points de cette circonférence que nous sommes naturellement invités à découvrir.

Notre problème se trouve donc ainsi ramené au suivant :

Trois cercles c, c', c'' étant donnés de grandeur et de situation sur un plan ; déterminer en quels points t, t', t'' ils doivent être touchés par un quatrième cercle C qui les touche tous trois.

Mais il n'est pas difficile de voir que, pourvu que l'on sache trouver le point de contact de C avec l'un quelconque des cercles donnés ; en répétant successivement le même procédé pour chacun de ces cercles, le problème se trouvera résolu.

Au moyen de cette remarque, notre problème se trouve ramené au suivant :

Trois cercles c, c', c'' étant donnés de grandeur et de situation sur un même plan, déterminer en quel point l'un d'eux est touché par un quatrième cercle C qui les touche tous trois.

Il nous est facile de prononcer présentement sur le mérite des deux modes de solution que nous avons d'abord indiqués.

Pour parvenir à la résolution complète d'un problème, il y a inévitablement à exécuter un certain nombre d'opérations qui dépendent de la nature de ce problème et qu'on ne saurait, avec toute l'adresse possible, abréger et réduire indéfiniment. Or, dès qu'on a le centre et le rayon du cercle cherché, le problème est à peu près résolu ; donc, la recherche de ce centre et de ce rayon doit compter toute la somme de constructions que la résolution du problème, simplifiée autant qu'elle peut l'être, peut exiger.

Au contraire, si nous avons les points de contact du cercle cherché avec les trois cercles donnés, le problème ne sera pas encore complètement résolu, et il nous restera encore à faire passer un cercle par trois points donnés ; donc, il faudra moins faire pour parvenir jusques-là que pour arriver à la solution complète du problème ; donc enfin, il doit être plus facile de trouver les points de contact du cercle cherché avec les trois cercles donnés, qu'il ne le serait de trouver le centre et le rayon de ce cercle.

A plus forte raison devra-t-il être plus facile de trouver un de ces points de contact que de les trouver tous trois, puisque, ce point trouvé, on n'aura encore exécuté que le tiers de la construction nécessaire pour les trouver tous trois ; puis donc que, lorsqu'ils sont connus, le problème n'est pas encore complètement résolu, on peut présumer, avec beaucoup de vraisemblance, que la recherche de l'un d'eux ne comportera pas même le tiers de la complication totale du problème proposé (*).

Occupons-nous donc de la recherche du point t'' où le cercle C touche le cercle c''.

Un point est déterminé, sur un plan, lorsqu'on connaît deux lignes, droites ou courbes, sur lesquelles il doit se trouver.

(*) On peut établir, en principe, qu'en général, il doit être d'autant plus facile de ramener un problème à un autre que la solution de celui-ci est plus difficile ; pourvu cependant que le dernier soit, s'il est permis de s'exprimer ainsi, sur la route du premier. Ainsi, par exemple, il est beaucoup plus aisé d'aller de Dunkerque à Amiens que de Dunkerque à Collioure, parce que Amiens se trouve sur la route de Dunkerque à Collioure, et fort loin de cette dernière ville. Mais, quoique Berlin soit fort loin de Collioure, il est beaucoup plus court d'aller de Dunkerque à Collioure que de Dunkerque à Berlin ; parce que Berlin est tout-à-fait hors de la route qui joint ces deux villes.

Si Viete et Newton sont parvenus très-simplement à ramener le problème qui nous occupe à celui où il s'agit de décrire un cercle qui, passant par un point donné, touche deux autres cercles donnés, c'est que ce dernier problème est presque aussi difficile à résoudre que le premier.

Or, pour le point t'', nous connaissons déjà une telle ligne : c'est la circonférence c''; il n'est donc plus question que d'en trouver une autre.

Notre problème se trouve donc ainsi ramené au suivant :

Trois cercles c, c', c'' étant donnés de grandeur et de situation sur un plan, trouver une ligne qui coupe c'' au point t'' où il est touché par un quatrième cercle C, qui touche à la fois les trois premiers.

Mais il est essentiel de remarquer que ce dernier problème est indéterminé, puisqu'un même point peut être déterminé d'une infinité de manières différentes par l'intersection de deux lignes. C'est de la même manière que, lorsqu'on a deux équations entre deux inconnues x et y, on peut remplacer ces deux équations d'une infinité de manières différentes, par le système de deux autres équations ayant lieu en même temps qu'elles, et donnant conséquemment les mêmes valeurs pour les deux inconnues (*).

Rapportons les données et les inconnues du problème à deux axes rectangulaires. Si nous n'aspirions qu'à la plus grande symétrie possible, nous supposerions ces axes absolument quelconques. Si, au contraire, nous n'aspirions qu'à la simplicité, nous pourrions placer l'origine au centre de l'un de nos cercles et faire passer l'un des axes par le centre de l'un des deux autres.

Mais pour concilier, autant qu'il est possible, la simplicité avec la symétrie, nous nous bornerons à placer le centre de l'un de nos

(*) Nous n'hésitons pas à regarder cette substitution d'équations les unes aux autres, sur laquelle les traités élémentaires sont loin d'insister aussi fortement qu'ils le devraient, comme un des plus puissans moyens de l'analise et de la géométrie. C'est elle qui fait, en particulier, presque tout le mérite de la discussion des lignes et surfaces du second ordre, exposée à la page 61 du V.e volume de ce recueil, ainsi que de la théorie de leurs pôles que l'on rencontre à la page 293 du tome III.e.

cercles à l'origine, en donnant d'ailleurs aux axes une direction quelconque par rapport aux deux autres.

Quant au choix du cercle qui aura son centre à l'origine, il ne pourrait être douteux ; et on sent que ce doit être c'' puisqu'il joue un rôle particulier, dans le problème auquel nous avons réduit le problème proposé.

Soient donc respectivement r, r', r'' les rayons des cercles c, c', c'' ; soient a, b les coordonnées du centre de c, et soient a', b' celles du centre de c'.

Soit R le rayon inconnu du cercle C, et soient A, B les coordonnées inconnues de son centre. Soient enfin x, y les coordonnées inconnues du point t'' où C touche c'' ; ce qui donnera une première équation

$$x^2+y^2=r''^2. \qquad (1)$$

Supposons, pour fixer les idées, que tous les contacts doivent être extérieurs ; il faudra pour cela que la distance du centre de C au centre de chacun des cercles c, c', c'' soit égale à la somme de leurs rayons, ce qui donnera

$$(A-a)^2+(B-b)^2=(R+r)^2 ; \qquad (2)$$

$$(A-a')^2+(B-b')^2=(R+r')^2 ; \qquad (3)$$

$$A^2+B^2=(R+r'')^2 ; \qquad (4)$$

et telles sont les équations qui résoudraient le problème, si nous voulions prendre pour inconnues les coordonnées du centre et le rayon du cercle cherché.

Avant d'aller plus loin, nous observerons que, dans le cas où le cercle C devrait envelopper quelqu'un des cercles c, c', c'', ou en être enveloppé, ce serait la différence des rayons, et non leur somme, qui devrait être égale à la distance des centres ; il faudrait

donc changer les signes de quelques-uns des rayons r, r', r'', ou bien changer quelque part le signe de R. On peut observer, au surplus que chacun des binômes $R+r$, $R+r'$, $R+r''$ se trouvant élevé au quarré, l'un de ces changemens équivaut à l'autre; et l'on voit qu'en variant, de toutes les manières possibles, les signes de r, r', r'', le problème aura 8 solutions, comme il est d'ailleurs aisé de s'en convaincre, en remarquant que le cercle cherché peut envelopper tous les cercles donnés ou les toucher tous extérieurement; qu'il peut, de trois manières, envelopper l'un d'eux et toucher les deux autres extérieurement; et qu'il peut également, de trois manières, toucher l'un d'eux extérieurement et envelopper les deux autres. Nous conserverons néanmoins le signe positif aux trois rayons, en nous rappelant, dans le résultat final, qu'ils peuvent être indifféremment positifs et négatifs.

Lorsque la mise en équation d'un problème conduit immédiatement à plusieurs équations entre plusieurs inconnues; la première chose qu'il faut faire est d'examiner si, en combinant ces équations entre elles, d'une manière convenable, on ne peut pas en déduire quelques autres plus simples; car, c'est souvent là un moyen très-propre à simplifier la recherche dont on s'occupe.

En appliquant ces réflexions aux équations (2, 3, 4), on voit sur-le-champ qu'on simplifiera notablement les deux premières, en leur substituant leurs différences avec la troisième, lesquelles sont, en réduisant et transposant,

$$2aA+2bB-2(r''-r)R=a^2+b^2+(r''-r)(r''+r) \qquad (5)$$

$$2a'A+2b'B-2(r''-r')R=a'^2+b'^2+(r''-r')(r''+r') . \qquad (6)$$

On peut encore introduire, dans ces dernières équations, une simplification très-propre à faciliter l'élimination de R entre elles et l'équation (4) : c'est d'y introduire $R+r''$, qui entre seul dans celle-ci; elles deviendront ainsi

$$2aA+2bB-2(r''-r)(R+r'')=a^2+b^2-(r''-r)^2, \qquad (7)$$

$$2a'A+2b'B-2(r''-r')(R+r'')=a'^2+b'^2-(r''-r')^2. \qquad (8)$$

telles sont donc, avec l'équation (4), les équations les plus simples qu'on puisse employer pour parvenir aux coordonnées du centre et au rayon du cercle cherché.

Mais ce ne sont point ces coordonnées et ce rayon que nous nous sommes déterminés à prendre pour inconnues : ce sont les coordonnées x, y du point de contact t'' de C avec c'', entre lesquelles nous avons déjà l'équation (1). Cherchons donc à lier ces nouvelles inconnues avec les inconnues des équations (4, 7, 8), afin de pouvoir éliminer ces dernières.

Or, le point t'' est en ligne droite avec l'origine et le centre C, d'où il suit qu'on doit avoir

$$\frac{y}{x}=\frac{B}{A} \quad \text{ou} \quad yA=xB. \qquad (9)$$

Si présentement on élimine A, B, $R+r''$ entre les quatre équations (4, 7, 8, 9), l'équation en x et y qui en résultera sera celle d'une certaine ligne qui coupera le cercle donné c'' au point cherché t''.

Si cette équation était trop compliquée, on pourrait tenter de la simplifier à l'aide de l'équation (1) qui, pour le point cherché t'', doit avoir lieu en même temps qu'elle, ce qui reviendrait à substituer à la ligne cherchée une autre ligne plus simple, coupant, comme elle, le cercle c'' au point t''.

Mais rien n'empêche d'effectuer cette combinaison dans le courant même de l'élimination, afin d'en rendre le résultat le plus simple possible. On peut remarquer d'ailleurs que nous avons proprement cinq inconnues A, B, R, x, y, liées par les équations (1, 4,

7,

7, 8, 9); et que conséquemment nous pouvons faire de ces équations, qui ont lieu en même temps, telle combinaison qu'il nous conviendra.

Des équations (4, 9) on tire

$$A=\frac{x(R+r'')}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad B=\frac{y(R+r'')}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

ou plus simplement, en ayant égard à l'équation (1);

$$A=\frac{x(R+r'')}{r''}, \qquad B=\frac{y(R+r'')}{r''};$$

substituant ces valeurs dans les équations (7, 8), elles deviendront

$$2\{ax+by-r''(r''-r)\}(R+r'')=r''\{a^2+b^2-(r''-r)^2\};$$

$$2\{a'x+b'y-r''(r''-r')\}(R+r'')=r''\{a'^2+b'^2-(r''-r')^2\},$$

d'où l'on tire enfin, par l'élimination de $R+r''$;

$$\frac{ax+by-r''(r''-r)}{a^2+b^2-(r''-r)^2}=\frac{a'x+b'y-r''(r''-r')}{a'^2+b'^2-(r''-r')^2}. \qquad (10)$$

Telle est donc l'équation d'une ligne qui coupe le cercle c'' au point cherché t''; puis donc que cette équation est du premier degré seulement, la ligne dont il s'agit est une ligne droite.

Mais une ligne droite coupe un cercle en deux points; et il importe de savoir, avant d'aller plus loin, quels problèmes résoudront ces deux points. Pour cela rappelons-nous que nous avons écrit nos équations primitives dans l'hypothèse que tous les contacts étaient extérieurs, et que nous avons observé que l'on passerait de cette hypothèse aux autres par le simple changement des signes de r, r', r'', ce qui peut avoir lieu de huit manières différentes.

Mais il est aisé de voir, par la forme de l'équation (10), qu'elle ne change pas lorsqu'on y change à la fois les signes des trois rayons; d'où il résulte que les huit cas que présentent les variations de signes de ces trois rayons ne peuvent lui faire prendre que quatre formes différentes; et que, sous chaque forme, elle résout deux problèmes absolument opposés; elle résout donc, sous la forme qu'elle a ici, et le cas où le cercle cherché doit toucher extérieurement les trois cercles donnés, et le cas où il doit les envelopper tous.

On pourrait présentement, par la combinaison des équations (1, 10), parvenir aux valeurs des coordonnées x, y du point t''; ces valeurs seraient compliquées de radicaux, et on les construirait par les procédés connus. Mais, nous allons bientôt voir qu'il s'en faut que ce soit là le meilleur parti à prendre.

Lorsqu'un point est donné par deux équations entre ses coordonnées, au lieu de résoudre ces équations, il est souvent incomparablement plus commode de construire les lignes qu'elles expriment, et dont l'intersection doit déterminer le point cherché.

Nous pouvons donc réduire la recherche du point t'' à la construction des lignes représentées par les équations (1, 10); mais la première est toute construite : c'est la circonférence donnée c''; il ne s'agit donc que de construire l'autre.

Pour construire cette droite, on pourrait chercher les longueurs des segmens qu'elle détermine sur les axes, et construire ensuite ces deux segmens; mais ce n'est point encore là le meilleur parti à prendre (*).

(*) Ceux qui prétendent contester à la géométrie analitique l'avantage d'offrir des constructions simples et élégantes se fondent principalement sur ce que, quelque attention qu'on apporte à bien choisir les axes des coordonnées, ces axes sont, le plus souvent, des lignes tout-à-fait étrangères au problème qu'il s'agit de résoudre.

« Qu'il soit question, par exemple, disent-ils, de décrire un cercle qui touche

Pour construire une droite, il est nécessaire et il suffit de connaître deux points de sa direction ; on sait d'ailleurs qu'on reconnaît qu'un point est sur une droite lorsque ses coordonnées rendent identique l'équation de cette droite.

Donc, si l'on trouve deux relations entre x et y en vertu desquelles l'équation d'une droite devienne identique ; les valeurs de x et y déduites de ces relations seront les coordonnées d'un point de cette droite.

Or, on a deux manières bien simples de rendre identique l'équation (10); la première est de supposer ses deux membres nuls ; la seconde est de les rendre égaux à l'unité.

On obtient ainsi les deux couples d'équations

$$\left\{\begin{array}{ll} ax+by=r''(r''-r), & (11) \\ a'x+b'y=r''(r''-r'). & (12) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} a(x-a)+b(y-b)=r(r''-r); & (13) \\ a'(x-a')+b'(y-b')=r'(r''-r'); & (14) \end{array}\right.$$

» à la fois trois cercles donnés. Les données naturelles du problème sont les » rayons des cercles donnés et les distances entre leurs centres pris deux à deux : » ses inconnues naturelles sont le rayon du cercle cherché et les distances de » son centre aux centres des cercles donnés ».

» Mais, aux distances entre les centres, la géométrie analitique substitue leurs » coordonnées qui sont des données et des inconnues factices et arbitraires ; et » de là vient la complication des constructions qu'on en déduit ».

Nous conviendrons volontiers de tout cela ; mais voilà aussi pourquoi nous ne réputons bonnes les constructions déduites de la géométrie analitique, qu'autant qu'on est parvenu à les rendre tout-à-fait indépendantes de la situation des axes ; voilà pourquoi nous nous efforçons de prouver, par des exemples, que la *géométrie analitique*, convenablement employée peut toujours en offrir de telles ; et qu'alors elles sont bien supérieures, pour l'élégance et la simplicité, à celles de la *géométrie pure*, ou même de ce que M. Carnot appelle *géométrie mixte*.

Donc les valeurs de x et y, déduites des équations (11, 12), sont les coordonnées d'un point de la droite (10); et il en est de même des valeurs de x et y déduites des équations (13, 14).

On pourrait donc chercher ces deux systèmes de valeurs et les construire ; on aurait ainsi deux points de la droite (10), qui se trouverait par là complètement déterminée. Mais on peut faire mieux encore.

Pour déterminer le point exprimé par les équations (11, 12), ce qu'il y a de mieux à faire est de construire les droites que ces deux équations représentent, et qui, par leur intersection, détermineront le point cherché. On en peut dire autant du point donné par les équations (13, 14), lequel ne sera autre que l'intersection des droites que ces deux équations représentent. Tout se réduit donc à savoir quelles sont les quatre droites que représentent les équations (11, 12, 13, 14).

Mais, comme il est d'ailleurs évident que les droites (12, 14) sont situées par rapport aux cercles c', c'', de la même manière que le sont les droites (11, 13), par rapport aux cercles c, c''; il nous suffira de nous occuper de ces dernières, que l'on reconnaît d'ailleurs pour des droites parallèles entre elles et perpendiculaires à la droite qui joint les centres des deux cercles.

Nous pouvons remarquer, en outre, que l'équation (11) devient l'équation (13), en y changeant respectivement x et y en $a-x$ et $b-y$, et en permutant entre eux les deux rayons r, r'', d'où il est facile de conclure que la droite (13) est, par rapport au cercle c, ce qu'est la droite (11) par rapport au cercle c''. Tout se réduit donc à savoir quelle est cette dernière droite.

On sait qu'en prenant sur le cercle c'' un point dont les coordonnées soient x', y', et soient conséquemment liées par la relation

$$x'^2+y'^2=r''^2 , \qquad (m)$$

l'équation de la tangente à ce cercle en ce point est

$$xx'+yy'=r''^2\,, \quad \text{ou} \quad y=-\frac{x'}{y'}x+\frac{r''^2}{y'}\,,$$

et cette tangente est indéterminée, puisque x' et y' ne sont liés que par l'équation (m). Si, pour la déterminer, on veut qu'elle touche aussi le cercle c, il faudra exprimer que la perpendiculaire abaissée sur elle du centre de ce cercle est égale à son rayon, ce qui donnera

$$\frac{b+\frac{x'}{y'}a-\frac{r''^2}{y'}}{\sqrt{1+\frac{x'^2}{y'^2}}}=r\,, \quad \text{ou} \quad \frac{ax'+by'-r''^2}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=r\,,$$

ou, en ayant égard à l'équation (m),

$$ax'+by'=r''(r''-r)\,. \qquad (n)$$

C'est donc en combinant entre elles les équations (m, n) qu'on obtiendra les coordonnées du point où la tangente commune à c et c'' touche c''; et, puisque l'équation (m) est du second degré, il y aura deux pareilles tangentes, et conséquemment deux points de contact.

Mais, au lieu de résoudre les équations (m, n) il reviendra au même, et il sera plus commode, de construire les deux lignes qu'elle exprime, et dont les intersections donneront les points de contact demandés; puis donc que l'une (m) est le cercle c'' lui-même; l'autre (n) qui est du premier degré doit être celle d'une droite qui joint les points où il est touché par les tangentes communes à ce cercle et à c; or, (n) est la même chose que (11); donc (11) est l'équation de la corde de contact avec c'' des tangentes communes à c et c''; donc (13) est l'équation de la corde de contact des mêmes tangentes avec c; donc enfin (12) et (14) sont les cordes de contact avec c'' et c' des tangentes communes à ces deux cercles.

Voici donc à quoi se réduit la construction du problème. Soient menées les tangentes communes extérieures à nos trois cercles pris deux à deux, et les cordes de contact de ces tangentes avec chaque cercle. Les deux cordes de contact sur c se couperont en M et leurs parallèles sur c' et c'' en N. Les deux cordes de contact sur c' couperont en M′ et leurs parallèles sur c'' et c en N′. Les deux cordes de contact sur c'' se couperont en M″ et leurs parallèles sur c et c' en N″.

Soient menées MN, M′N′, M″N″. MN coupera c en t et $\mathfrak{t}$; M′N′ coupera c' en t' et $\mathfrak{t}'$; et M″N″ coupera c'' en t'' et $\mathfrak{t}''$. Faisant ensuite passer deux cercles, l'un par t, t', t'', l'autre par $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$, $\mathfrak{t}''$, ces deux cercles rempliront les conditions du problème.

On peut remarquer, au surplus, que les centres de ces deux cercles seront faciles à déterminer; car ils se trouveront à l'intersection des droites menées des centres des cercles donnés soit aux trois points t, t', t'', soit aux trois points $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$, $\mathfrak{t}''$.

On se convaincra facilement, d'après tout ce qui a été dit ci-dessus, que pour obtenir les six autres solutions dont le problème est susceptible, il ne s'agit que de substituer, tour-à-tour, à deux des couples de tangentes extérieures les couples de tangentes qui se croisent entre les deux cercles qu'elles touchent à la fois.

En vain objecterait-on que, lorsque deux des cercles donnés sont l'un dans l'autre, en tout ou en partie, ces constructions sont en défaut, puisqu'alors ils n'ont plus de tangentes intérieures communes et peuvent même n'en point avoir d'extérieures : on peut observer en effet qu'alors même les droites (11, 12, 13, 14) ne cessent point pour cela d'être réelles, et peuvent toujours être construites. On peut même définir les droites (11, 13), indépendamment de toute considération de tangentes, en disant que ce sont des cordes ayant pour pôle commun le centre de similitude de c et c''.

On peut modifier un peu les constructions auxquelles nous venons de parvenir de la manière suivante :

Au lieu de supposer les deux membres de l'équation (10) égaux à l'unité, on peut les supposer égaux à deux ; ce qui donnera

$$\left\{\begin{array}{ll} 2ax+2by-a^2-b^2=r''^2-r^2\,, & (15) \\ 2a'x+2b'y-a'^2-b'^2=r''^2-r'^2\,. & (16) \end{array}\right.$$

équations qui pourront remplacer les équations (13, 14), et qu'on reconnaîtra aisément (*Annales*, tom. VI, pag. 329) pour celles des axes radicaux, tant des deux cercles c et c'' que des deux cercles c' et c'' ; le point qu'elles détermineront sera donc le centre radical des trois cercles ; et nous le représenterons par O.

On pourra donc remplacer, par la recherche de ce point O, celle des points N, N', N'' ; de sorte qu'en menant simplement OM, OM', OM'', elles détermineront sur c, c', c'', les six points t, θ, t', θ', t'', θ''.

Ceci prouve, au surplus, que les droites MN, M'N', M''N'' concourent en un même point, qui est le centre radical des trois cercles.

Cette seconde construction n'est guère plus simple que la première ; mais elle a le précieux avantage sur elle de s'appliquer littéralement à la recherche d'un cercle qui en touche trois autres sur la surface de la sphère (Voyez *Annales*, tom. IV, pag. 349).

On déduira de tout ceci la construction des neuf autres problèmes de Viète, en supposant successivement les rayons des cercles nuls ou infinis.

On traitera exactement de la même manière, et par les mêmes principes, le problème où il sera question de décrire une sphère qui en touche quatre autres, situées d'une manière quelconque dans l'espace ; et on parviendra à des constructions tout-à-fait analogues.

Dans un prochain article nous donnerons un nouvel exemple, non moins remarquable, de l'utilité de la géométrie analitique dans la recherche de la construction des problèmes de géométrie.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Application de la méthode des projections à la résolution de quelques problèmes de géométrie plane ;

Par M. Coste, officier au régiment de Valence (*Artillerie*).



M. Monge est le premier, je crois, qui ait eu l'idée ingénieuse d'appliquer les principes de la géométrie à trois dimensions à la résolution des problèmes et à la démonstration des théorèmes de la géométrie plane. Nous nous proposons ici d'ajouter encore quelques exemples nouveaux de cette application à ceux qui ont été donnés jusqu'ici par les nombreux élèves de cet illustre géomètre.

PROBLÈME I.

Déterminer les intersections d'une droite donnée avec une section conique dont on connaît seulement les élémens, sans construire cette dernière.

Solution.

I.er Cas. La courbe est une Hyperbole.

Nous supposerons l'hyperbole donnée par ses asymptotes et par son premier axe.

Soient EE′ et FF′ les deux asymptotes se coupant au centre C de la courbe (fig. 1) ; et soit A l'un de ses sommets ; de manière que CA soit la direction de son premier axe ou axe transverse. Soit

Soit de plus MN la droite donnée, dont il s'agit de déterminer les intersections avec la courbe, sans construire cette dernière.

Considérons le plan de cette hyperbole comme un plan vertical. Par l'un quelconque A' des points de la direction de son axe transverse, menons à cet axe une perpendiculaire indéfinie, coupant ses asymptotes en E' et F', et considérons cette perpendiculaire comme la ligne de terre, rencontrée en D par la droite MN.

Soit menée AB, parallèle à CA, et se terminant en B à l'asymptote EE'; soit B' la projection de B sur E'F' et soit portée A'B' de A' en C' sur le prolongement de CA'. Du centre C', et avec un rayon égal à A'E' ou A'F', soit décrit un cercle dont E''F'' soit le diamètre parallèle à E'F'.

Nous pouvons concevoir ce cercle comme la base d'un cône droit, égal à celui qu'engendreraient les asymptotes de la courbe en tournant autour de son axe; C et C' seront les projections verticale et horizontale du sommet de ce cône; et, d'après les théories connues, l'intersection du cône avec le plan vertical sera l'hyperbole même dont il s'agit; d'où il suit que notre problème se réduit à assigner les intersections de MN avec la surface de ce cône.

Par le sommet du cône et par la droite MN soit conçu un plan; cette droite MN sera elle-même la trace verticale de ce plan; et, par les procédés connus, on trouvera, pour sa trace horizontale, une autre droite, coupant la base du cône en deux points G et H.

Les droites menées du sommet à ces deux derniers points seront donc les deux génératrices suivant lesquelles le cône sera coupé par ce plan, et qui devront conséquemment couper la droite donnée aux deux points cherchés.

Mais, en projetant les points G et H en G' et H' sur la ligne de terre, les deux génératrices se projetteront elles-mêmes vertica-

lement, suivant CG′ et CH′ : les points M et N où ces dernières droites couperont MN seront donc les points cherchés.

II.e Cas. La courbe est une Ellipse.

Nous supposerons l'ellipse donnée par la grandeur et la situation de son grand axe, et par la grandeur de son petit axe.

Soit AC (fig. 2) la grandeur et la situation du grand axe ; soit portée la longueur du petit axe sur cette droite de A en B ; soit MN la droite donnée, dont il s'agit de déterminer les intersections avec l'ellipse, sans construire cette courbe ; et soit D le point où cette droite MN coupe la perpendiculaire menée à AC, par son extrémité A.

Soit pris le plan de cette courbe pour plan vertical, et soit prise pour ligne de terre une parallèle quelconque à AC, sur laquelle se projètent les points A, B, C en A′, B′, C′ ; soit E′ le point où cette ligne de terre est rencontrée par la droite donnée MN.

Du point A′ comme centre et avec A′C′ pour rayon, soit décrit un arc terminé en C″ à sa rencontre avec le prolongement de BB′ et soit menée A′C″ ; nous pourrons considérer A′D et A′C″ comme les traces verticale et horizontale d'un certain plan vertical.

Concevons qu'on fasse tourner le plan de l'ellipse autour de A′D, jusqu'à ce qu'il coïncide avec celui-là, et supposons qu'il entraîne avec lui la droite DE′. Si du point A′ comme centre nous décrivons, entre les côtés de l'angle C′AC″ l'arc E′E″, le point E″ sera la position du point E′ dans la nouvelle situation du plan de l'ellipse ; de sorte qu'en projetant E″ en K′, DK′ sera la projection verticale de notre droite dans sa nouvelle situation.

Cela posé, ce plan ayant ainsi tourné, l'ellipse aura évidemment pour projection sur le plan vertical le cercle décrit sur AB comme diamètre, et coupé en G et H par la projection verticale de la droite donnée, toujours dans la nouvelle situation de cette droite.

G et H seront donc les projections verticales des intersections de notre droite avec l'ellipse; et on en aura les projections horizontales en projetant G et H en G′ et H′, et prolongeant GG′ et HH′, jusqu'à la rencontre de A′C″, en M″ et N″.

Décrivant donc, du point A′ comme centre, dans l'angle C′A′C″, avec les rayons A′M″ et A′N″, les arcs M″M′, N″N′; M′ et N′ seront les projections horizontales des mêmes intersections, dans la situation primitive du plan de l'ellipse.

On obtiendra donc ces intersections elles-mêmes, en élevant sur A′C′, aux points M′ et N′, les perpendiculaires M′M et N′N terminées en M et N à la droite DE′.

Mais il reviendra au même, et il sera plus court et plus commode de déterminer M et N par les intersections de DE′ avec les parallèles menées à A′C′, par les points G et H.

III.e Cas. La courbe est une Parabole.

Nous supposons la parabole donnée par son sommet, la direction de son axe et un quelconque de ses points.

Soient A (fig. 3) le sommet de la parabole; AB la direction de son axe; P un autre point quelconque de cette courbe; et GH la droite donnée, dont il faut assigner les intersections avec elle, sans la construire.

En abaissant de P sur AB la perpendiculaire PE et en la prolongeant au delà, d'une quantité EQ=EP, le point Q sera un autre point de la courbe. Par ces deux points et par le point A soit fait passer un cercle dont le diamètre soit AB et le centre C; ce cercle coupera la droite donnée en deux points G et H.

Soit considéré le plan de ce cercle, qui est aussi celui de la courbe, comme plan de projection horizontal; et soit prise pour ligne de terre une parallèle quelconque à AB, sur laquelle soient projetés les points A, C, E, B en A′, C′, E′, B′.

Sur A′B′ et A′E′ comme bases, soient décrits, dans le plan vertical, les deux triangles équilatéraux A′C″B′ et A′F′E′. Si nous

considérons le cercle dont le diamètre est AB comme la base d'un cône droit, dont le sommet se projette en C″ sur le plan vertical; E′E et E′F′ seront les traces d'une section parabolique faite dans ce cône, de manière à obtenir une parabole égale à la parabole donnée; de sorte que si l'on imagine qu'on fasse tourner le plan de cette dernière autour de E′E, jusqu'à ce que E′A′ soit devenu E′F′, les deux courbes coïncideront exactement.

Supposons que, dans ce mouvement, la droite GH soit entraînée; sa projection verticale deviendra E′F′; et, par une construction facile, indiquée dans la figure, on obtiendra les projections horizontales G″, H″, des points G, H, dans leur nouvelle situation; de manière que G″H″ sera la projection horizontale de la même droite.

Ayant ainsi les deux projections de cette droite; on pourra, par elle et par le sommet du cône faire passer un plan; ce plan coupera le cône suivant deux génératrices, qui contiendront les deux points cherchés, lesquelles se trouveront aux intersections de ces génératrices avec la droite donnée; ramenant donc ces deux points, par les moyens connus, dans le plan rabattu, on aura la solution du problème.

PROBLÈME II.

Décrire une parabole qui touche quatre droites données?

Solution.

Soient AB, BC, CD, DE (fig. 4) les quatre droites données, auxquelles on veut que la parabole cherchée soit tangente. Menons une cinquième droite arbitraire AE, de sorte cependant qu'elle coupe les deux droites extrêmes AB et DE, de manière à former, avec nos quatre droites, le pentagone ABCDE; soit pris le plan de ce pentagone pour plan horizontal; et soit prise pour ligne de terre une perpendiculaire quelconque GH à AE.

Par l'un quelconque O des points de GH, concevons un plan vertical, perpendiculaire à cette droite; concevons en outre que le polygone ABCDE, après avoir tourné autour de sa base AE, de manière à devenir parallèle à ce plan, se meuve ensuite, parallèlement à lui-même, de manière à venir se confondre avec lui; on trouvera facilement, au moyen des constructions indiquées dans la figure, que, dans cette nouvelle situation du polygone, ses sommets A, B, C, D, E, se projetteront horizontalement en A', B', C', D', E', et verticalement en O, B'', C'', D'', O.

Concevons que le pentagone, toujours dans cette situation, soit une section faite dans une pyramide pentagonale dont le sommet se projette horizontalement en un point quelconque S' de $A'E'$, et verticalement en un point quelconque S'' du prolongement de cette droite dans le plan vertical. Par d'autres constructions, suffisamment indiquées dans la figure, on trouvera facilement que les sommets de la base horizontale de cette pyramide seront A''', B''', C''', D''', E'''. Nous pouvons remarquer, en outre, que, le plan de la face latérale de cette pyramide qui répond à $A'''E'''$ étant vertical, il s'ensuit que le plan de la section, également vertical et parallèle à cette face, ne rencontrera pas la pyramide opposée, et ne déterminera pas dans celle-là une section fermée.

Concevons présentement une section conique inscrite à la base pentagonale $A'''B'''C'''D'''E'''$. Si l'on fait de cette section conique la base d'un cône ayant même sommet que notre pyramide, ce cône lui sera inscrit, et sa section par le plan vertical, perpendiculaire en O à GH, sera une parabole tangente à nos quatre droites ramenées à ce plan; de sorte qu'en faisant mouvoir le plan de cette parabole parallèlement à lui-même, jusqu'à ce que $A'E'$ soit devenue AE, et le faisant ensuite tourner autour de cette dernière droite, pour le rabattre sur le plan horizontal, le problème proposé serait complètement résolu.

Cela posé, avec nos cinq tangentes à la section conique qui forme la base du cône, nous pouvons aisément, à l'aide des

méthodes connues (*), et même en n'employant que la règle, en trouver une sixième, et assigner en outre la droite qui lui correspond dans la figure ABCDE. Cette droite sera évidemment une cinquième tangente à la parabole demandée.

Ayant ainsi cinq tangentes à notre parabole, on pourra, à l'aide des méthodes connues, et même en ne faisant usage que de la règle, en trouver tant d'autres, et de plus assigner tant de points de la courbe qu'on voudra.

Le mode de solution dont nous venons de faire usage est très-général; et il n'est pas difficile de voir que puisqu'on sait, au moyen de n points et de $5-n$ tangentes à une section conique, trouver tant d'autres points et de tangentes à cette courbe qu'on peut en désirer; on pourra aussi, par des méthodes analogues à celle dont nous venons de faire usage, résoudre tous les cas de ce problème général : connaissant n points et $4-n$ tangentes à une parabole, déterminer tant d'autres points et tant d'autres tangentes à cette courbe qu'on voudra?

(*) On trouve ces méthodes exposées, avec beaucoup de développemens très-curieux, dans un petit ouvrage ayant pour titre : *Mémoire sur les lignes du second ordre*, par C. J. BRIANCHON, capitaine d'artillerie, ancien élève de l'école polytechnique (Paris, *Bachelier*, 1817). L'auteur y résout tous les cas de ce problème général : *Étant donnés n points et 5—n tangentes à une section conique, trouver tant d'autres points et de tangentes à cette courbe qu'on voudra?*

Cet intéressant petit ouvrage n'ayant point été imprimé sous les yeux de l'auteur, il s'y est glissé quelques fautes que nous croyons devoir indiquer ici.

Pag. 61, ligne 4 — proportions; *lisez* : propositions.

Ligne 13 — fond; *lisez* : fonde.

Pag. 63, ligne 6, en remontant — coniques; *ajoutez* : semblables.

Pag. 67, ligne 5 — 1725; *lisez* : 1735.

J. D. G.

SCÉNOGRAPHIE.

Sur la perspective de la sphère ;

Par M. GERGONNE.

Tous les traités de *Perspective pratique* offrent des méthodes pour mettre en perspective des points, des lignes droites, des figures planes rectilignes, des cercles, des polyèdres, des prismes, des pyramides, des cylindres et des cônes, donnés dans l'espace ; mais, dans les ouvrages même les plus étendus sur cette matière, on ne trouve absolument rien sur la perspective de la sphère et des cercles qui peuvent y être tracés.

Un silence aussi général, sur une des questions les plus usuelles que la perspective puisse offrir, ne saurait guère être l'effet du hasard, ou d'une omission volontaire ; et tout porte à croire que si ceux qui ont écrit sur la scénographie n'ont rien dit de la perspective de la sphère, c'est qu'ils ont tacitement supposé que cette perspective était trop facile à assigner pour qu'il fût nécessaire d'indiquer les méthodes nécessaires pour l'obtenir ; sans doute parce qu'ils ont cru que la perspective d'une sphère ne pouvait être qu'un cercle, ayant pour centre la perspective du centre de la sphère.

J'ai moi-même long-temps partagé cette opinion, sans trop l'approfondir; et il n'y a guère plus d'une douzaine d'années qu'en y réfléchissant mieux, j'ai reconnu clairement que le cas où la perspective d'une sphère est un cercle, n'est, pour ainsi dire, qu'un cas d'exception, et que, dans les cas les plus ordinaires, cette perspective doit être tout au moins une ellipse.

Je me suis occupé aussi de la recherche de cette ellipse, pour laquelle j'ai trouvé un procédé assez simple, j'en ai fait le sujet d'une petite note qui a été insérée dans le volume de l'*Académie du Gard*, pour 1807; mais, dans la persuasion où j'étais que tous ceux qui voudraient se donner la peine d'y réfléchir trouveraient comme moi que *la perspective d'une sphère n'est pas toujours un cercle*, j'ai cru devoir peu insister sur ce point.

J'ai pourtant rencontré, à cet égard, un grand nombre d'incrédules; et la petite note dont je viens de parler m'a presque fait passer pour un visionnaire, auprès de beaucoup de gens. Je n'aurais été aucunement surpris de trouver de l'opposition chez les dessinateurs, chez les peintres, chez les architectes et même chez les ingénieurs civils et militaires de l'ancienne école, que leurs cadets ont laissés, pour la plupart, bien loin derrière eux; mais ce qui m'a paru tout-à-fait étrange, c'est de rencontrer des géomètres de profession, des professeurs de mathématiques transcendantes, des doyens même de facultés de sciences qui, tout en convenant que je pouvais avoir raison en théorie, prétendaient que, dans la pratique, il fallait absolument faire abstraction de ma doctrine, et représenter généralement une sphère par un cercle; comme s'il pouvait exister une pratique raisonnable qui ne fût pas fondée sur une saine théorie.

On m'a fait remarquer postérieurement que 'SGravesande, à la page 31 du 1.er volume de ses *Opuscules*, a aussi traité le problème de la perspective d'une sphère, qu'il reconnaît, comme moi, devoir être une ellipse; mais le procédé de 'SGravesande, assez compliqué d'ailleurs, ne conduit qu'à la détermination de l'un quelconque des

des points de l'ellipse, et doit conséquemment être répété autant de fois qu'on veut obtenir de points de cette courbe, tandis que le mien conduit directement à la détermination de ses quatre sommets.

D'après ces considérations, je crois donc faire une chose utile en revenant de nouveau, et en insistant, plus fortement que je ne l'avais fait une première fois, sur un point de doctrine qui m'avait d'abord paru à l'abri de toute objection. Je vais donc employer tous les raisonnemens que je croirai les plus concluans pour établir que la perspective d'une sphère est communément une ellipse ; j'indiquerai ensuite brièvement le procédé qu'il faut suivre pour construire cette courbe.

Tout le monde, je pense, est d'accord sur ce point ; que la perspective d'un corps de figure quelconque doit avoir pour limite la figure fermée résultant de l'intersection du tableau avec un angle polyèdre ou une surface conique qui, ayant son sommet à l'œil du spectateur, serait exactement circonscrite au corps dont il s'agit.

Donc, en particulier, la perspective d'une sphère doit être bornée par l'intersection du plan du tableau avec une surface conique qui, ayant son sommet à l'œil du spectateur, serait circonscrite à la sphère.

Mais, toute surface conique circonscrite à la sphère est une surface conique de révolution, un cône droit dont l'axe passe par le centre de cette sphère.

Donc la perspective d'une sphère est l'intersection du plan du tableau avec un cône droit dont l'axe passe par l'œil et par le centre de la sphère.

Mais la section d'un cône droit, par un plan ne peut être un cercle qu'autant que le plan coupant est perpendiculaire à l'axe du cône

Donc, la perspective d'une sphère ne peut être un cercle qu'autant que le plan du tableau est perpendiculaire à la droite qui va

de l'œil au centre de la sphère, ou, ce qui revient au même, qu'autant que la droite qui mène de l'œil au centre de la sphère est perpendiculaire au plan du tableau, ou, enfin, qu'autant que le centre de la sphère est sur la perpendiculaire indéfinie abaissée de l'œil sur le tableau.

On objecte que, de quelque part que l'on envisage une sphère, on la voit toujours terminée par un cercle : je l'accorde, et j'en tire une nouvelle preuve de mon assertion.

De quelque part qu'on envisage une sphère, on la voit toujours terminée par le cercle suivant lequel elle est touchée par le cône circonscrit ayant son sommet à l'œil.

Donc la perspective de la sphère ne doit être autre que celle de ce cercle.

Mais la perspective d'un cercle ne peut être un cercle qu'autant que le plan de ce cercle est parallèle au plan du tableau.

Donc la perspective d'une sphère ne saurait être un cercle qu'autant que le plan du cercle suivant lequel cette sphère est touchée par un cône circonscrit ayant son sommet à l'œil est parallèle au plan du tableau.

Mais le plan de ce cercle est perpendiculaire à la droite qui va de l'œil au centre de la sphère.

Donc, de nouveau, la perspective d'une sphère ne sera un cercle qu'autant que le centre de cette sphère sera sur la direction de la perpendiculaire abaissée de l'œil sur le plan du tableau.

On peut prouver, à l'inverse, comme il suit, qu'un cercle tracé sur le tableau, s'il n'a pas son centre au pied de la perpendiculaire abaissée de l'œil sur le tableau, c'est-à-dire, au point que les praticiens ont nommé *point de vue*, ne saurait être la perspective d'une sphère.

Si, ayant tracé sur le tableau une figure fermée quelconque, on fait passer par cette figure une surface pyramidale ou conique indéfinie, ayant son sommet à l'œil; cette figure pourra être in-

distinctement la perspective de tous les corps auxquels la surface pyramidale ou conique se trouverait exactement circonscrite, mais ne pourra être la perspective que de ces seuls corps.

Donc, en particulier, un cercle tracé sur le plan du tableau pourra être indistinctement la perspective de tous les corps auxquels serait exactement circonscrit le cône qui, passant par ce cercle, aurait son sommet à l'œil, et ne pourra être la perspective que de ces seuls corps.

Mais toutes les fois que ce cercle a son centre hors du point de vue, le cône est nécessairement oblique.

Donc, tout cercle tracé sur le tableau, d'un centre autre que le point de vue, ne saurait être la perspective que des seuls corps auxquels un cône oblique peut être exactement circonscrit.

Mais un cône oblique ne saurait être exactement circonscrit à une sphère.

Donc enfin, le cercle décrit sur le tableau de tout autre centre que le point de vue, ne saurait être la perspective d'aucune sphère.

Donc, en particulier, quelle que soit la situation de l'œil, deux cercles, non concentriques, tracés sur le même tableau, ne sauraient être les perspectives de deux sphères.

Confirmons encore cette conclusion par de nouvelles considérations.

Aucun praticien n'oserait soutenir sérieusement que l'ombre d'une sphère sur un plan est constamment un cercle; et ils conviennent tous que cela ne peut avoir lieu que dans le cas, très-particulier, où la droite menée par la lumière et par le centre de la sphère est perpendiculaire au plan sur lequel l'ombre se projette.

Tous les praticiens conviennent également qu'il y a une exacte parité entre la théorie des ombres et la perspective, et que, pour passer de l'une à l'autre, il suffit de considérer la lumière comme l'œil du spectateur, le plan où l'ombre se projette comme le plan

du tableau, et l'ombre projetée comme la perspective du corps qui la projette.

Donc les praticiens conviennent tacitement que la perspective d'une sphère n'est pas toujours un cercle.

Mais, si la perspective d'une sphère n'est pas toujours un cercle, par quelle autre ligne pourra-t-elle être terminée ? Ce pourra être indistinctement par toutes les lignes qu'on peut obtenir en coupant un cône droit par un plan, sans même en excepter la ligne droite.

Dans le cas le plus ordinaire, c'est-à-dire, dans le cas où la sphère sera entièrement située d'un côté du tableau et l'œil de l'autre, il est évident que sa perspective sera une ellipse.

Si l'on remarque en outre que la section elliptique d'un cône droit par un plan a toujours son grand axe dirigé suivant la projection de l'axe du cône sur le plan coupant, on en conclura que l'ellipse perspective d'une sphère a constamment son grand axe situé sur la droite qui joint la perspective du centre de la sphère au point de vue. Il est de plus aisé de voir que cette ellipse sera d'autant plus alongée qu'elle sera plus distante du point de vue.

On sent que ce que nous venons de dire de la perspective de la sphère, doit, avec les restrictions et modifications convenables, s'entendre également de la perspective de tous les corps de forme analogue ; ainsi, dans un tableau d'histoire, par exemple, point de grâce pour la plus belle tête, pour celle même de Vénus ; et elle devra être un peu alongée vers le point de vue, si elle a l'imprudence de s'écarter tant soit peu de ce point.

En vain objecterait-on que des objets ainsi représentés doivent paraître difformes ? ce serait au contraire en les figurant réguliers qu'ils sembleraient tels. Sans doute, ces objets paraîtraient difformes à celui qui se placerait successivement vis-à-vis de chacun d'eux ; mais on ne doit pas oublier que tout tableau doit être destiné pour un spectateur unique, placé en un lieu déterminé ; et que sa si-

tuation doit rectifier les irrégularités apparentes introduites à dessein, dans la représentation des objets, précisément dans la seule vue de produire sur son œil une illusion plus parfaite. Un tableau dont toutes les parties seraient dessinées pour le spectateur placé vis-à-vis d'elles, ferait nécessairement, de quelque part qu'on voulût l'envisager, un effet tout-à-fait insupportable ; à moins pourtant que les objets représentés sur ce tableau, ne fussent de nature à n'avoir aucune forme nécessairement déterminée, tels, par exemple, que des arbres et des rochers.

Passons à la construction de l'ellipse perspective de la sphère.

Soient HH′ la ligne horizontale et VV′ la ligne verticale (fig. 5) se coupant au point de vue O, c'est-à-dire, au pied de la perpendiculaire abaissée de l'œil sur le tableau.

Puisque la sphère est donnée, on doit connaître la distance de son centre au tableau, ainsi que le pied de la perpendiculaire abaissée de ce centre sur le tableau. Soit C′ le pied de cette perpendiculaire.

Après avoir mené OC′, élevons à cette droite, par son extrémité O, une perpendiculaire OO′ égale à la distance de l'œil au tableau, ou à ce que les praticiens appellent le *rayon principal*. A son extrémité opposée C′, élevons-lui, du côté opposé, la perpendiculaire C′C″, égale à la distance du centre de la sphère au tableau ; et soit menée O′C″, coupant OC′ en C.

Si l'on conçoit que le double triangle rectangle OO′CC′C″ tourne autour de OC′, jusqu'à ce que son plan soit perpendiculaire à celui du tableau ; il est clair que le point O′ viendra se placer à l'œil du spectateur, et le point C″ au centre de la sphère, O′C″ deviendra donc le rayon visuel dirigé vers le centre de la sphère ; mais, dans ce mouvement, le point C demeurera immobile ; donc ce point est celui où le plan du tableau est percé par la droite qui joint l'œil au centre de la sphère ; c'est-à-dire, que ce point est la perspective du centre de la sphère, mais non pas le centre de la perspective de cette sphère, ainsi que nous l'allons voir

tout-à-l'heure (*). OC′ est donc la direction du grand axe de l'ellipse.

Présentement soit décrit un cercle du point C″ comme centre et avec un rayon égal à celui de la sphère. Soient menées à ce cercle, par le point O′, les deux tangentes O′A′, O′B′, coupant OC′ en A et B.

Si l'on conçoit un cône circonscrit à la sphère, dont le sommet soit l'œil du spectateur, en imaginant le même mouvement que tout-à-l'heure, nos tangentes deviendront les intersections du cône avec le plan perpendiculaire au tableau conduit par OC′; d'où il est aisé de conclure que AB est le grand axe de l'ellipse cherchée.

Imaginons présentement que l'œil se meuve parallèlement à OC′, il est aisé de voir que, par l'effet de ce mouvement, le grand axe de l'ellipse changera seul de grandeur et de situation, tandis que la grandeur de son petit axe demeurera invariable.

Cette grandeur doit donc être ce qu'elle serait si l'œil, toujours également distant du tableau, venait se placer sur le prolongement de la perpendiculaire abaissée sur le plan de ce tableau du centre même de la sphère; auquel cas la perspective de cette sphère se réduirait à un cercle.

Or, de là résulte évidemment la construction suivante:

(*) De toutes les méthodes qu'on peut employer pour déterminer la perspective d'un point donné, celle que nous venons d'appliquer à la recherche de la perspective du centre de notre sphère nous paraît, à la fois, la plus naturelle et la plus simple.

Lorsqu'on veut avoir la perspective d'une droite, on peut, par ce procédé, déterminer la perspective de l'un quelconque de ses points. Alors, si la droite est parallèle au tableau, on mènera par cette perspective une parallèle à la droite donnée, laquelle en sera la perspective. Dans le cas contraire, on en obtiendra la perspective, en joignant la perspective du point, au point où la droite donnée perce le tableau.

Prolongez $C''C'$, au-delà de C', d'une quantité $C'O''=OO'$; par O'' menez au cercle la tangente $O''D''$, coupant OC' en D'; et $C'D'$ sera le demi-petit axe de l'ellipse.

Elevant donc, sur le milieu de AB, une perpendiculaire DE double de $C'D'$ et ayant son milieu sur AB; les points A, B, C, D seront les quatre sommets de la courbe; il sera donc facile d'en achever la construction.

Lorsque l'on suppose l'œil à une distance infinie, ainsi qu'il arrive souvent, sur-tout dans le dessin des figures de géométrie; si l'on suppose cet œil situé vis-à-vis du tableau auquel cas les projections des objets sur ce tableau sont purement orthographiques, la perspective de la sphère n'est autre chose que la projection sur le tableau de celui de ses grands cercles qui est parallèle au plan de ce tableau; c'est-à-dire que la perspective de la sphère est alors un cercle ayant même rayon qu'elle, et ayant pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée de son centre sur le tableau.

Mais on évite ordinairement cette disposition de l'œil, qui présente l'inconvénient de n'offrir au spectateur que la seule face des objets qui est directement tournée vers le tableau; et on préfère de projeter les objets sur le tableau par des parallèles à une droite fixe, inclinée à son plan. En adoptant ce système de perspective, voici de quelle manière on devra modifier notre construction.

Soit toujours C' (fig. 6) le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan du tableau, et soit C la perspective de ce centre, facile à déterminer par des procédés connus et qui sera, dans le cas présent, le centre de l'ellipse.

Elevons à $C'C$, au point C', la perpendiculaire $C'C''$, égale à la distance du centre de la sphère au tableau; du point C'' comme centre, et, avec un rayon égal à celui de la sphère, soit décrit un cercle auquel soient menées deux tangentes AA', BB', parallèles à CC'' et coupant CC' en A et B. Alors AB sera le grand axe de l'ellipse; et son petit axe DE sera égal au diamètre même de la sphère.

J'invite ceux qui voient mieux par les yeux du corps que par ceux de l'entendement, à vouloir bien prendre la peine de mettre en perspective un cylindre vertical posé sur un socle cubique, et surmonté d'une sphère ; en supposant le plan vertical conduit par l'œil et par l'axe du cylindre oblique au tableau. S'ils construisent successivement la perspective de la sphère par nos méthodes et par un cercle, dont je leur abandonne d'ailleurs le choix du centre et du rayon ; ils sentiront bientôt que, tandis que, dans le premier mode de construction, tout se trouve dans une harmonie parfaite, le second, au contraire, est tout-à-fait insoutenable pour la vue.

Je demande bien sincèrement pardon au lecteur, vraiment géomètre, d'avoir insisté aussi long-temps sur une chose si claire et si simple ; mais, d'après l'expérience que j'en ai acquise, loin d'avoir rien dit de trop, j'ai lieu de douter que j'en aie dit assez pour convaincre certains lecteurs. J'aurai du moins offert des armes de plus d'une sorte à ceux qui voudront essayer de vaincre leur résistance sur ce point de doctrine.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAINE.

Extrait d'une lettre au Rédacteur des Annales;

Par M. VECTEN, ex-professeur de mathématiques spéciales.



. . . .
. . . .
. . . .

En cherchant à démontrer la première des propositions suivantes, qui l'était seulement pour le triangle rectangle, je suis parvenu à plusieurs autres, que vous serez peut-être bien aise de connaître.

Si sur les trois côtés d'un triangle quelconque ABC, (fig. 7) on construit trois quarrés AD, BF, CI, il en résultera :

1.° Qu'en abaissant des sommets de ce triangle des perpendiculaires AK, BL, CM, sur les directions des côtés opposés, et menant les droites AG, BI, BH, CD, CE, AF; les deux premières se couperont sur CM en P, les deux suivantes sur AK en N, et les deux dernières sur BL en O.

2.° Que ces six droites seront perpendiculaires deux à deux; savoir : CD sur AG, AF sur BH, BI sur CE; les deux premières se coupant en Q, les deux suivantes en R, et les deux dernières en S.

3.° Que, si l'on mène les droites EF, IG, HD, elles passeront respectivement par les points Q, R, S et diviseront en deux parties égales les angles formés en ces points par les six premières droites.

4.° Que, si l'on mène les droites AS, BQ, CR, elles se couperont en un même point T, et seront respectivement perpendiculaires à DH, EF, GI.

5.° Que, si l'on mène les droites DG, FH, IE, on formera les trois triangles DBG, FCH, IAE, qui seront équivalens entre eux et au triangle ABC.

6.° Qu'enfin la somme des quarrés de ces trois dernières droites sera égale à trois fois la somme des quarrés des côtés du triangle ABC.

Cette dernière proposition revient à dire que, si l'on prolonge les trois côtés AB, BC, CA d'un triangle ABC (fig. 8) dans le même sens, des quantités BA′, CB′, AC′, respectivement égales aux côtés prolongés, et menant les droites A′C, B′A, C′B; on aura

$$\overline{A'C}^2+\overline{B'A}^2+\overline{C'B}^2=3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2).$$

Je ne vous envoie pas les démonstrations de ces diverses propositions, parce qu'elles sont toutes extrêmement simples, et qu'elles se présentent, pour ainsi dire, d'elles-mêmes en construisant la figure. Seulement, comme la première partie de la quatrième proposition repose sur ce théorème que *les cordes communes à trois cercles qui se coupent deux à deux concourent en un même point*, et que la démonstration de ce théorème n'est véritablement satisfaisante que lorsque les trois cercles ont une partie de leur plan qui leur est commune (*); j'ai pensé que vous seriez bien aise de

(*) M. Vecten veut sans doute parler ici de la démonstration *géométrique* du théorème; car, pour sa démonstration analitique, elle se réduit simplement à remarquer que, si $A=o$, $B=o$, $C=o$ sont les équations de trois cercles, $A-B=o$, $B-C=o$, $C-A=o$ seront les équations de leurs cordes communes deux à deux, et que chacune de ces trois dernières équations est comportée par les deux autres. Cette démonstration, qui ne souffre aucune exception, s'étend même au cas où les cercles ne se coupent pas. Elle s'applique avec une égale facilité à trois cercles d'une sphère et à quatre sphères dans l'espace. Sur quoi voyez (*Annales*, tom. VI, pag. 326). *J. D. G.*

savoir comment on peut démontrer cette proposition par la géométrie.

Nous supposerons d'abord que les trois cercles, que nous désignerons simplement par leurs centres α, β, γ (fig. 9), se coupent de manière à former un triangle curviligne A′B′C′ qui leur soit commun. Il faut démontrer que, dans ce cas, les trois droites AA′, BB′, CC′ se coupent en un même point. Pour cela, menons les droites $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$; puis joignons le point A aux β, γ ; le point B aux points γ, α, et le point C aux points α, β. On a évidemment $\alpha B=\alpha C$, $\beta C=\beta A$, $\gamma A=\gamma B$; donc les quatre triangle $\alpha\beta\gamma$, $\alpha C\beta$, $\beta A\gamma$, $\gamma B\alpha$ peuvent être considérés comme les quatre faces d'un tétraèdre développé. Mais les cordes AA′, BB′ étant respectivement perpendiculaires sur les côtés $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ de la base du tétraèdre, il s'ensuit que leur intersection G détermine le pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan de cette base, du sommet du tétraèdre ; et comme le pied de cette perpendiculaire est également déterminé par l'intersection de l'une ou de l'autre de ces cordes avec la troisième CC′ ; il s'ensuit que les trois cordes doivent concourir au même point G, puisque, dans le cas contraire, on aurait, d'un même point hors d'un plan, plusieurs perpendiculaires à ce plan.

Mais si les trois cercles, au lieu de se couper de la manière que nous avons d'abord supposée, laissent entre eux un triangle curviligne $a'b'c'$, ne faisant partie d'aucun d'eux ; il est facile de voir que la précédente démonstration devient illusoire. Il est donc nécessaire de faire voir que le théorème est également vrai dans ce second cas.

Pour cela, prenons, sur le prolongement de l'une quelconque des cordes, de aa' par exemple, un point A, de manière que AD soit plus grand que AG ; G étant le point où la corde aa' est coupée par l'une quelconque des deux autres, bb' par exemple. Des points β et γ et avec des rayons respectivement égaux à βA et γA, décrivons deux circonférences qui couperont respectivement les prolongemens des cordes cc' et bb' en C et B ; menons les droites $A\beta$, $A\gamma$, $B\gamma$, $B\alpha$, $C\alpha$, $C\beta$, et nous formerons les

triangles $\beta A\gamma$, $\gamma B\alpha$, $\alpha C\beta$, qui seront tels que, si on les fait tourner respectivement autour des droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, on pourra toujours s'arranger de manière à ce que les trois points A, B, C se réunissent en un seul, puisqu'on a $A\beta=\beta C$, $\gamma A=\gamma B$ et $AD>DG$; c'est-à-dire, que les quatre triangles $\beta A\gamma$, $\gamma B\alpha$, $\alpha C\beta$, $\alpha\beta\gamma$ peuvent être regardés comme les quatre faces d'un tétraèdre. Mais les trois droites aa', bb', cc', ou celles-ci AD, BE, CF, sont respectivement perpendiculaires sur les côtés $\beta\gamma$, $\gamma\beta$, $\alpha\beta$ du triangle $\alpha\beta\gamma$; donc elles se coupent en un seul et même point G, qui est le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet du tétraèdre sur le plan $\alpha\beta\gamma$ de sa base.

On peut remarquer que, puisque le point B coïncide avec le point C, lorsque les deux triangles $\gamma B\alpha$, $\alpha C\beta$ sont relevés; il en résulte que $B\alpha$ coïncide avec $C\alpha$, et par conséquent qu'on a $B\alpha=C\alpha$, c'est-à-dire que, si l'on décrit du point α comme centre, et avec αB pour rayon, une circonférence de cercle, elle passera par le point C.

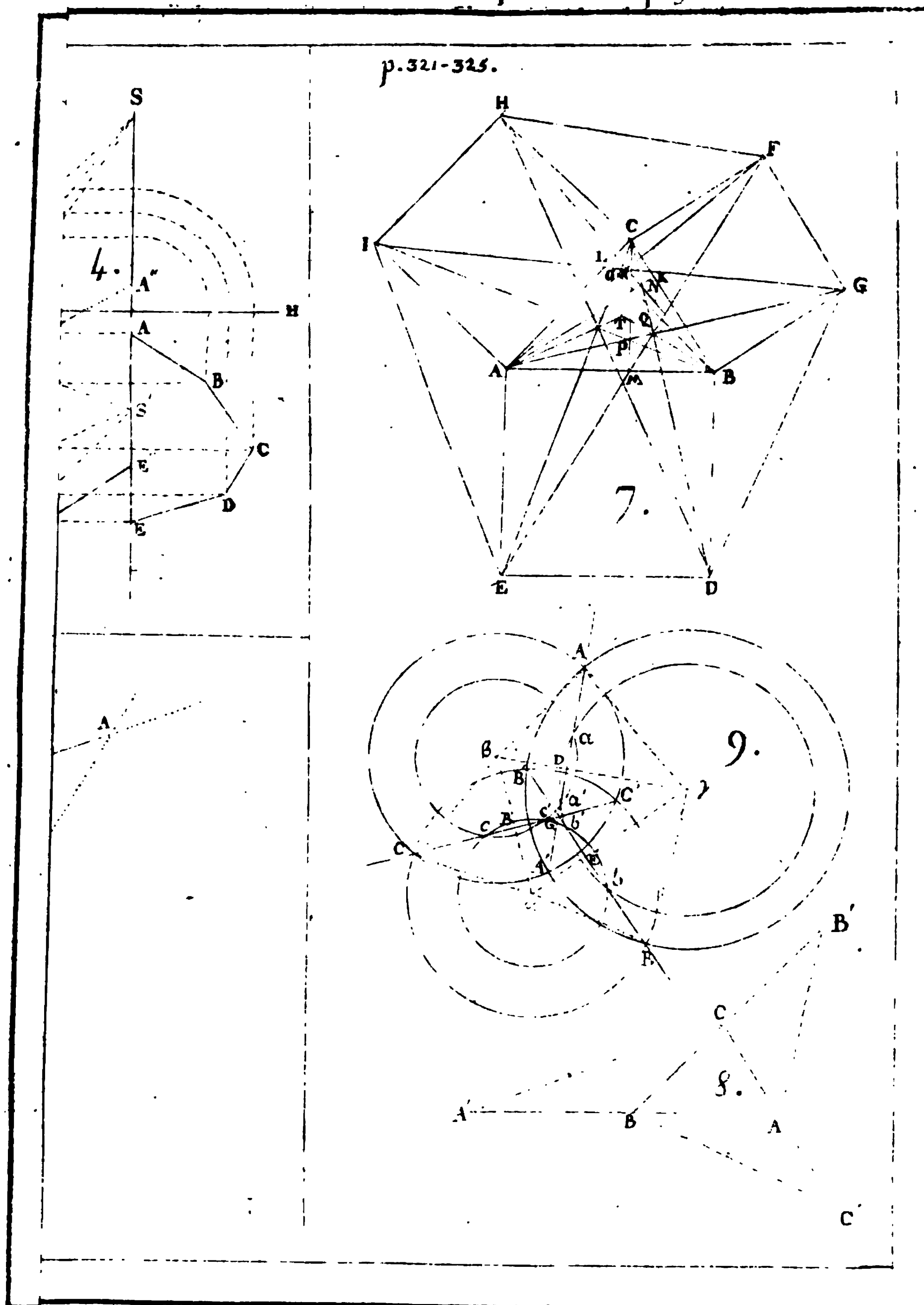
Paris, le 30 juin 1817.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. Inscrire à une sphère un tétraèdre dont les faces passent par quatre droites données?

II. Circonscrire à une sphère un tétraèdre dont les sommets soient sur quatre droites données?



J. D. G. fecit.

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE.

Solution et construction, par la géométrie analitique, de deux problèmes dependant de la géométrie de la règle;

Par M. GERGONNE.



En montrant, dans un précédent article (page 289 de ce volume), comment la géométrie analitique, convenablement employée, peut conduire, pour la solution des problèmes de géométrie, à des constructions bien supérieures, pour l'élégance et la simplicité, à celles que fournit la géométrie pure, j'ai promis d'ajouter encore de nouveaux exemples de cette vérité à celui qu'offrait cet article. C'est dans la vue de remplir cette promesse, que je me propose ici de résoudre les deux problèmes suivans:

PROBLÈME I. A une ligne quelconque du second ordre, inscrire un triangle dont les côtés passent par trois points donnés; en n'employant que la règle seulement?

PROBLÈME II. A une ligne quelconque du second ordre, circonscrire un triangle dont les sommets soient sur trois droites données; en n'employant que la règle seulement?

Le premier de ces deux problèmes, borné seulement au cercle, et sans exclure l'emploi du compas, a été long-temps célèbre; et depuis Pappus, qui en a traité un cas très-particulier, beaucoup d'illustres géomètres en ont fait le sujet de leurs recherches.

En 1810, j'essayai d'y appliquer la géométrie analitique, toujours pour le cas du cercle ; elle me conduisit à une construction fort simple qui a paru dans les recueils de l'*Académie du Gard*; mais on n'y pouvait parvenir qu'à la suite d'un calcul assez laborieux ; et, comme je n'avais pas aperçu que cette construction n'exigeait que l'emploi de la règle, je ne songeai nullement à l'étendre à toutes les sections coniques.

A la page 126 du 1.er volume du présent recueil, je proposai de démontrer géométriquement la solution graphique que j'avais obtenue, sans faire connaître l'analise qui m'y avait conduit. On me fit aussitôt observer que ma construction pouvait s'étendre indistinctement à toutes les lignes du second ordre ; et c'est ce qui me détermina à généraliser mon premier énoncé, comme on le voit à la page 259 du même volume. MM. Servois et Rochat donnèrent l'un et l'autre (pag. 337 et 342) une solution du problème ainsi généralisé.

Mais autre chose est de légitimer par le raisonnement une construction déjà connue ou de parvenir à cette construction. Je me propose donc de faire voir ici comment la géométrie analitique, bien employée, conduit à cette même construction d'une manière pour ainsi dire inévitable.

Comme il est très-aisé de ramener le dernier de nos deux problèmes au premier, c'est d'abord de celui-ci uniquement que je m'occuperai ; et, comme un problème du domaine de la géométrie de la règle est résolu, pour toutes les sections coniques, dès qu'il l'est pour une seule d'entre elles, je supposerai, pour plus de simplicité, que la courbe dont il s'agit est une parabole.

Je réduirai donc le problème au suivant :

PROBLÈME. Inscrire à une parabole un triangle rectiligne dont les côtés, prolongés s'il est nécessaire, passent par trois points donnés sur le plan de cette courbe ?

Solution. Soient P, P′, P″ les points donnés, et S, S′, S″

les sommets du triangle cherché ; de telle sorte que P soit sur S′S″, P′ sur S″S, et P″ sur SS′.

Il est évident que, si l'un des sommets, le sommet S par exemple, était connu, le problème pourrait être réputé résolu ; car, en menant de ce point des droites par les points P′, P″, leurs intersections avec la parabole détermineraient respectivement les deux autres sommets S″, S′. Occupons-nous donc uniquement de la recherche de ce point S.

Soit $2p$ le paramètre de la parabole dont il s'agit. Soit pris son axe pour axe des x, et la tangente à son sommet pour axe des y. Soient alors les coordonnées tant des points donnés P, P′, P″ que des points cherchés S, S′, S″, ainsi qu'il suit :

$$\text{Pour P}\begin{cases} a\,; \\ b\,; \end{cases} \quad \text{Pour P}'\begin{cases} a'\,; \\ b'\,; \end{cases} \quad \text{Pour P}''\begin{cases} a''\,; \\ b''\,; \end{cases}$$

$$\text{Pour S}\begin{cases} x\,, \\ y\,; \end{cases} \quad \text{Pour S}'\begin{cases} x'\,; \\ y'\,; \end{cases} \quad \text{Pour S}''\begin{cases} x''\,; \\ y''\,. \end{cases}$$

D'abord, puisque S, S′, S″ sont des points de la courbe ; on doit avoir

$$y^2=px\,; \quad y'^2=2px'\,; \quad y''^2=2px''\,: \qquad (1)$$

En second lieu, puisque chacun des points P, P′, P″ est en ligne droite avec deux de ceux-là, on doit avoir

$$\frac{x-x'}{y-y'}=\frac{x-a''}{y-b''}\,, \quad \frac{x'-x''}{y'-y''}=\frac{x'-a}{y'-b}\,, \quad \frac{x''-x}{y''-y}=\frac{x''-a'}{y''-b'}\,; \qquad (2)$$

Voilà donc six équations, au moyen desquelles on peut déterminer

les six coordonnées xy, $x'y'$, $x''y''$ des trois points inconnus S, S', S''; mais, comme nous bornons notre recherche à celle du point S, il nous suffira d'éliminer x', y', x'', y'' entre les cinq dernières; il en résultera une équation en x et y qui, jointe à la première, nous fera connaître les coordonnées du point cherché.

Mais on peut, par une combinaison convenable de ces six équations, en obtenir d'autres incomparablement plus simples. En retranchant, en effet, deux à deux, les équations (1), on obtient celles-ci

$$\frac{x-x'}{y-y'}=\frac{y+y'}{2p}\,,\quad \frac{x'-x''}{y'-y''}=\frac{y'+y''}{2p}\,,\quad \frac{x''-x}{y''-y}=\frac{y''+y}{2p}\,. \qquad (3)$$

En comparant ces équations respectivement aux équations (2), on en déduit les suivantes

$$\frac{y+y'}{2p}=\frac{x-a''}{y-b''}\,,\quad \frac{y'+y''}{2p}=\frac{x'-a}{y'-b}\,,\quad \frac{y''+y}{2p}=\frac{x''-a'}{y''-b'}\,. \qquad (4)$$

en chassant les dénominateurs dans ces dernières et en y remplaçant respectivement $2px$, $2px'$, $2px''$ par leurs valeurs y^2, y'^2, y''^2, données par les équations (1); elles deviendront enfin

$$\left.\begin{aligned} y\,y'-b''(y\;+y')+2pa''&=0\,,\\ y'y''-b\;(y'+y'')+2pa\;&=0\,,\\ y''y\;-b'\,(y''+y\;)+2pa'&=0\,. \end{aligned}\right\}\;(5)$$

équations délivrées de x, x', x''; et entre lesquelles il n'est plus question que d'éliminer y' et y'' pour obtenir la valeur de y.

L'élimination de y'' entre les deux dernières donne

$$\frac{by'-2pa}{y'-b}=\frac{b'y-2pa'}{y-b'} ;$$

ou, en chassant les dénominateurs et transposant,

$$(b-b')yy'+(bb'-2pa)y-(bb'-2pa')y'+2p(ab'-a'b)=0 :$$

Eliminant enfin y' entre celle-ci et la première des équations (5) il viendra

$$\frac{(bb'-2pa)y+2p(ab'-a'b)}{(b-b')y-(bb'-2pa')}+\frac{b''y-2pa''}{y-b''}=0 ;$$

ou, en chassant les dénominateurs et réduisant,

$$\begin{aligned}&\{bb'+bb''-b'b''-2pa\}y^2\\ &+2\{bb'b''+p[b(a'+a'')-b'(a+a'')-b''(a+a')]\}y\\ &+2p\{a'bb''+a''bb'-ab'b''-2pa'a''\}=0 .\end{aligned}$$

En remplaçant y^2 par son équivalent $2px$; toute l'équation sera divisible par 2, et pourra ensuite être écrite ainsi

$$\begin{vmatrix}-\{b'b''-p(a'+a'')\} & px+\{b'b''-p(a'+a'')\}b & y-\{b'b''-p(a'+a'')\}pa\\ +\{b\,b'-p(a+a')\} & -\{b\,b'-p(a+a')\}b' & +\{b\,b'-p(a+a')\}pa'\\ +\{b\,b''-p(a+a'')\} & -\{b\,b''-p(a+a'')\}b'' & +\{b\,b''-p(a+a'')\}pa''\end{vmatrix}=0$$

ce qui revient à

(A) $\{b'b''-p(a'+a'')\}\{by-p(x+a)\}$

$$=\{bb''-p(a+a'')\}\{b'y-p(x+a')\}+\{bb'-p(a+a')\}\{b''y-p(x+a'')\}.$$

Telle est donc l'équation qu'il faudrait combiner avec l'équation $y^2=2px$, pour obtenir les deux coordonnées x, y du point cherché S ; puis donc que l'équation $y^2=2px$ est celle de la parabole donnée, et que l'autre n'est que du premier degré seulement ; il en faut conclure que celle-ci est l'équation d'une droite qui coupe la parabole donnée au point cherché S.

Tout se réduit donc à construire la droite (A), ou, ce qui revient au même, à déterminer deux points de sa direction ; ce qui revient encore à trouver deux systèmes de relations entre x et y qui y satisfassent.

Or, les deux systèmes de relations les plus naturels à établir pour y satisfaire sont les suivans :

$$(B')\begin{cases}(C') & b'y-p(x+a')=0,\\ (D') & \{b'b''-p(a'+a'')\}\{by-p(x+a)\}=\{bb'-p(a+a')\}\{b''y-p(x+a'')\};\end{cases}$$

$$(B'')\begin{cases}(C'') & b''y-p(x+a'')=0,\\ (D'') & \{b'b''-p(a'+a'')\}\{by-p(x+a)\}=\{bb''-p(a+a'')\}\{b'y-p(x+a')\};\end{cases}$$

donc le point déterminé par les équations (B′) et le point déterminé par les équations (B″) sont deux points de la direction de (A).

On pourrait, pour déterminer chacun de ces points, tirer les valeurs de x et y des deux couples d'équations par lesquels ils sont donnés ; mais il est incomparablement plus commode de construire les quatre droites (C′), (D′), (C″), (D″) elles-mêmes. L'intersection des deux premières sera le point (B′), celle des deux derniéres sera le point (B″).

Nous examinerons tout-à-l'heure ce que peuvent être les droites (C′), (C″) ; occupons-nous seulement, pour le présent, de la construction des droites (D′), (D″) ; ou, pour mieux dire, de la

construction de l'une d'elles ; car on voit assez que (D'') est par rapport au point P'', ce que (D') est par rapport au point P'.

La droite (D') serait déterminée, si nous connaissions deux quelconques des points de sa direction. Or, on voit d'abord que cette droite passe par le point P' ; d'où il suit qu'il ne s'agit plus que d'en trouver un autre point ; or, ce point sera donné par deux relations entre x et y qui résolvent également l'équation (D') ; et, entre toutes les relations qu'il soit possible de choisir, les plus simples sont, sans contredit, les suivantes :

$$(\text{E}')\begin{cases}(\text{C}) & by-p(x+a) ; \\ (\text{C}'') & b''y-p(x+a'') ;\end{cases}$$

La droite (D') est donc une droite menée par les points P' et E' ; et ce dernier point, lui-même, se trouve déterminé par l'intersection des droites (C), (C'').

Pour de semblables raisons, la droite (D'') sera une droite menée par le point P'' et par un point E'' intersection des deux droites (C), (C').

Notre construction se trouve donc réduite ainsi à celles des trois droites (C), (C'), (C''), ou plutôt à celle de la première seulement ; puisque les deux autres sont respectivement, par rapport aux points P', P'', ce qu'est celle-ci par rapport au point P.

Or, soit pris sur la parabole donnée un point quelconque (x', y') ; la tangente à la courbe en ce point sera, comme l'on sait,

$$y-y'=\frac{p}{y}(x-x'),$$

ou, en réduisant et mettant $2px'$ pour y'^2,

$$yy'=p(x+x') . \qquad (1)$$

Supposons, en second lieu, qu'il soit question de mener à la parabole une tangente par un point extérieur (a, b); en représentant par x', y' les coordonnées du point de contact; on aura pour déterminer ce point les deux équations

$$y'^2=2px' \quad \text{et} \quad by'=p(x'+a)\,; \qquad (2)$$

dont la première exprime que le point de contact est sur la courbe, tandis que la seconde exprime que le point (a, b) satisfait à l'équation (1). Puis donc que l'équation $y'^2=2px'$ est du second degré et l'autre du premier seulement, on aura deux points de contact et conséquemment deux tangentes par le point (a, b).

Dans la recherche de ces deux points de contact, au *lieu* de tirer des équations (2) les deux systèmes de valeurs qu'elles fournissent pour x et y, il revient au même et il est plus commode de construire les lignes qu'expriment ces deux équations. Puis donc que la première est celle de notre parabole elle-même, et que l'autre n'est que du premier degré seulement, cette dernière doit appartenir à une droite passant par les points où les deux tangentes touchent la courbe, c'est-à-dire, que cette droite est la polaire du point (a, b).

On voit donc, d'après cela, que nos trois droites (C), (C′), (C″), à la construction desquelles nous avons ramené notre problème, ne sont autre chose que les polaires respectives des trois points P, P′, P″.

Or, comme la droite polaire d'un point donné, sur le plan d'une section conique, peut se construire à l'aide de la règle seulement, il s'ensuit que nous pouvons étendre notre construction à une section conique quelconque; et voici à quoi elle se réduit.

Construction I. Soient trois points P, P′, P″, donnés à volonté, sur le plan d'une ligne du second ordre quelconque; et supposons qu'il soit question d'inscrire à la courbe un triangle dont les

les côtés, prolongés au besoin, passent respectivement par les trois points donnés.

Soient S, S', S'' les trois sommets inconnus, P devant se trouver sur $S'S''$, P' sur $S''S$, et P'' sur SS'.

Soient construites les polaires des points P, P', P''; représentons-les respectivement par C, C', C''; C' et C'' se coupant en E, C'' et C en E', C et C' en E''. Soient menées PE, $P'E'$, $P''E''$, coupant respectivement C, C', C'' en B, B', B''; alors la courbe sera coupée respectivement en S par $B'B''$, en S' par $B''B$, en S'' par BB'.

On doit remarquer, au surplus, que chacune de ces droites coupera la courbe en deux points, et qu'ainsi le problème aura deux solutions. On doit remarquer encore, comme nous l'avons déjà fait plus haut, que tout peut se réduire à la construction du point S d'où il est facile de conclure les deux autres. Il est donc superflu de déterminer le point B, et conséquemment de mener la droite PE.

Le second problème se ramène facilement à celui-ci.

Construction II. Soient trois droites C, C', C'', données à volonté, sur le plan d'une ligne du second ordre quelconque; et supposons qu'il soit question de circonscrire à la courbe un triangle dont les sommets soient sur les trois droites données.

Soient S, S', S'' les points inconnus où la courbe doit être touchée par les côtés du triangle, S étant son point de contact avec le côté qui se termine à C' et C''; S' le point de contact avec le côté qui se termine à C'' et C; et enfin S'' le point de contact avec le côté qui se termine à C et C'.

Cherchez les pôles respectifs P, P', P'', des droites C, C', C''. Opérez sur ces pôles et sur les droites C, C', C'', comme vous l'avez fait dans le problème précédent; les sommets S, S', S'' du triangle inscrit dont les côtés passent par P, P', P'' seront en même temps les points de contact de la courbe avec les côtés du triangle cherché.

Ce qui nous a principalement déterminé à prendre ces deux problèmes pour exemple de nos méthodes, c'est que M. Lhuilier, dans ses *Élémens d'analise géométrique et d'analise algébrique*, insinue que, soit sous le rapport de la mise en équation, soit sous celui de la construction, la géométrie analitique, qu'il appelle la *Méthode des coordonnées*, ne paraît guère leur être commodément applicable. Nous pensons que les géomètres qui prendront la peine de comparer nos constructions à celles qu'on déduit des considérations purement géométriques, en jugeront d'une toute autre manière.

Dans un prochain article, nous essayerons d'étendre nos procédés au problème général où il s'agit soit d'inscrire à une ligne du second ordre un polygone de m côtés, dont les côtés passent par un même nombre de points donnés, soit de circonscrire à la même courbe un polygone de m côtés dont les sommets se trouvent sur un pareil nombre de droites données.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution pratique du problème de combinaison proposé à la page 188 de ce volume;

Par M. J. B. Durrande.

1. Il est bien connu, depuis long-temps, que des lettres P, Q, R,......, toutes différentes les unes des autres, et au nombre de m, peuvent être disposées, *en ligne droite*, les unes a la suite des autres, d'un nombre de manières exprimé par $m!$ (*).

(*) J'emploie ici $m!$, avec M. Kramp, comme abréviation de $1.2.3.....m$; et j'en userai de même dans toute la suite de cet article. On a lieu d'être surpris qu'une notation si simple, et conséquemment si utile, ne soit point encore universellement adoptée.

2. Si l'on veut savoir de combien de manières différentes ces mêmes lettres peuvent être disposées, *circulairement*, les unes à la suite des autres; on considèrera qu'un arrangement circulaire quelconque étant donné, on peut le rompre en m points différens pour l'étendre en ligne droite; que par conséquent chaque arrangement circulaire fournit m arrangemens rectilignes différens; et qu'ainsi le nombre des arrangemens circulaires est m fois moindre que celui des arrangemens rectilignes; d'où il suit (1) que le nombre total des arrangemens circulaires doit être simplement $\frac{m!}{m}$ ou $(m-1)!$.

3. On peut confirmer ce résultat par un raisonnement inverse du précédent. Concevons que, dans un arrangement rectiligne quelconque on fasse passer $m-1$ fois consécutivement la première lettre à la dernière place, sans intervertir aucunement l'ordre des autres; on obtiendra ainsi m arrangemens rectilignes différens, que l'on ne ferait que reproduire sans cesse, si l'on voulait pousser plus loin l'application du procédé. Il suit de là évidemment que les $m!$ arrangemens rectilignes différens que nos m lettres sont susceptibles de fournir, peuvent être répartis en m groupes de $\frac{m!}{m}$ ou $(m-1)!$ arrangemens tels que les arrangemens de chaque groupe seront ainsi déduits les uns des autres par le passage continuel de la première lettre à la dernière place. Or, il est clair que les divers arrangemens rectilignes d'un même groupe ployés en cercle donneront toujours le même arrangement circulaire; d'où il suit que le nombre des arrangemens circulaires différens sera uniquement égal au nombre des groupes; c'est-à-dire, qu'il sera $\frac{m!}{m}$ ou $(m-1)!$, comme nous l'avons déjà trouvé ci-dessus.

4. Voilà ce qui arrive, lorsque les lettres P, Q, R,...... sont toutes différentes les unes des autres, ou, ce qui revient au même, lorsqu'il n'y en a qu'une seule de chaque sorte. Mais, on peut supposer que, dans la totalité de m lettres dont il s'agit, il se

trouve p lettres pareilles à P, q lettres pareilles à Q, r lettres pareilles à R, et ainsi des autres; de sorte qu'on ait $p+q+r+\ldots\ldots=m$. Il est connu qu'alors (*) le nombre des arrangemens *rectilignes* différens dont nos m lettres seront susceptibles; ou, ce qui revient au même, le nombre des manières différentes dont elles pourront être disposées en ligne droite les unes à côté des autres, sera exprimé par la formule

$$\frac{m!}{p!q!r!\ldots\ldots}.$$

5. On peut demander présentement, comme nous l'avons fait dans le premier cas, de combien d'arrangemens *circulaires*, réellement différens, ces mêmes lettres pourront être susceptibles; et il semblerait, au premier abord, que les raisonnemens que nous avons faits alors (2, 3) doivent conserver ici toute leur force, et qu'ainsi la formule qui répond à la question proposée doit être

$$\frac{m!}{m(p!q!r!\ldots\ldots)}, \quad \text{ou} \quad \frac{(m-1)!}{p!q!r!\ldots\ldots}.$$

Cette formule est, en effet, celle qui résout la question, dans le cas particulier où les nombres p, q, r, ,..... sont premiers entre eux; c'est-à-dire, dans le cas où il ne se trouve d'autres diviseurs que l'unité qui leur soient communs à tous.

6. Mais, dans le cas contraire, c'est-à-dire, dans le cas où quelque nombre, autre que l'unité, divise à la fois tous les nombres p, q, r, ... et par conséquent le nombre m, notre raisonnement cesse d'être applicable; et la formule se trouve tout-à-fait en défaut. Elle offre même souvent alors un préservatif contre les applications inconsidérées qu'on prétendrait en faire, en donnant, pour le nombre

(*) Voyez, en particulier, la page 201 du tome. II.e de ce recueil.

des arrangemens cherché, un nombre essentiellement fractionnaire; ce qui, dans une question de ce genre, est un signe manifeste d'absurdité. C'est, en particulier, ce qui arrive, lorsqu'on suppose toutes les m lettres égales entre elles et à P. La formule se réduit alors, en effet, à $\frac{1}{m}$ qui, excepté le seul cas où $m=1$, est nécessairement fractionnaire.

7. Il est très-aisé de concevoir pourquoi, dans le cas dont nous parlons, la formule ne saurait être applicable. Lorsqu'en effet les nombres p, q, r, ... ont un ou plusieurs diviseurs autres que l'unité qui leur sont communs à tous; parmi les arrangemens circulaires dont nos lettres sont susceptibles, il doit nécessairement s'en trouver de périodiques; or, ce qui est vrai des premiers cesse de l'être pour ceux-ci, c'est-à-dire, qu'en les rompant successivement en deux points différens, pour les étendre en ligne droite, on ne forme pas toujours deux arrangemens rectilignes distincts : cela n'a lieu, en effet, que lorsque les deux points de rupture ne sont pas des points semblablement placés dans deux périodes différentes, des points homologues de ces périodes.

8. Il y a donc lieu à proposer la question suivante dont nous ne nous proposons de donner ici, pour le présent, que la solution pratique; nous réservant de développer les raisonnemens qui nous y ont conduit dans un prochain numéro.

9. *PROBLÈME. On a* m *lettres, parmi lesquelles il se trouve des* P *en nombre* p, *des* Q *en nombre* q, *des* R *en nombre* r, *et ainsi des autres; en sorte qu'on a* p+q+r+......=m. *De combien de manières ces* m *lettres peuvent-elles être disposées circulairement les unes à côté des autres?*

10. *Solution.* I. Soit D le plus grand commun diviseur des nombres p, q, r, ,......, et soit

$$D=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}..............;$$

a, b, c,...... étant des nombres premiers essentiellement différens.

II. Soit formé le produit

$$(1+a+a^2+\ldots+a^\alpha)(1+b+b^2+\ldots+b^\beta)(1+c+c^2+\ldots+c^\gamma)\ldots;$$

dont les termes, au nombre de $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$, sont, comme l'on sait, tous les diviseurs de D, pris une seule fois chacun.

III. Soit désignée par f une fonction d'un nombre quelconque k, dont la définition soit

$$f(k)=\frac{\left(\frac{m}{k}\right)!}{\left(\frac{p}{k}\right)!\left(\frac{q}{k}\right)!\left(\frac{r}{k}\right)!\ldots}, \quad \text{d'où} \quad f(1)=\frac{m!}{p!q!r!\ldots}.$$

IV. Soit enfin

$$a^{\alpha'}b^{\beta'}c^{\gamma'}\ldots\ldots$$

le terme général de la suite que forment les diviseurs de D; de sorte qu'on puisse en déduire tous ces diviseurs en donnant successivement à chacun des exposans α', β', γ', ... toutes les valeurs entières, positives ou nulles, que permettront les conditions

$$\alpha'<\alpha+1, \quad \beta'<\beta+1, \quad \gamma'<\gamma+1, \ldots$$

V. Alors le nombre d'arrangemens circulaires cherché sera la somme des termes d'une suite de $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$ termes, dont le terme général sera

$$\frac{a^{\alpha'-1}b^{\beta'-1}c^{\gamma'-1}\ldots(a-1)(b-1)(c-1)\ldots}{m}f(a^{\alpha'}b^{\beta'}c^{\gamma'}\ldots);$$

et qui devra conséquemment renfermer tous les termes de cette forme qui pourront être formés sous les conditions ci-dessus énoncées.

11. *Remarque I.* Si le plus grand commun diviseur D des nombres p, q, r, ... était simplement le produit $abc\ldots$ de plusieurs nombres premiers inégaux, le terme général de la suite deviendrait simplement

$$\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{m}f(abc\ldots)$$

dans lequel on devrait successivement admettre et rejeter une ou plusieurs des lettres a, b, c, ..., en sorte que le nombre cherché serait de la forme

$$\frac{1}{m}f(1)+\frac{a-1}{m}f(a)+\frac{(a-1)(b-1)}{m}f(ab)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{b-1}{m}f(b)+\frac{(a-1)(c-1)}{m}f(ac)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{c-1}{m}f(c)+\frac{(b-1)(c-1)}{m}f(bc)+\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots$$

12. *Remarqne II.* Si le plus grand commun diviseur D des nombres p, q, r,...... était simplement une puissance a^α d'un nombre premier a ; le terme général de la suite deviendrait

$$\frac{a^{\alpha'-1}(a-1)}{m}f(a^{\alpha'})\;;$$

cette suite serait donc

$$\frac{1}{m}f(1)+\frac{a-1}{m}f(a)+\frac{a(a-1)}{m}f(a^2)+\frac{a^2(a-1)}{m}f(a^3)+\ldots+\frac{a^{\alpha-1}(a-1)}{m}f(a^\alpha)$$

13. *Remarque III.* Si le plus grand commun D des nombres p, q, r,..... était l'unité, c'est-à-dire, si ces nombres étaient premiers entre eux, alors α, β, γ,...... seraient nuls ; et la formule se réduirait à son premier terme

$$\frac{1}{m}f(1) \quad \text{ou} \quad \frac{m!}{m(p!q!r!\ldots\ldots)},$$

ainsi que cela doit être (5).

14. *Remarque IV.* Si enfin les m lettres données étaient toutes égales entre elles et à P ; on aurait $p=m$, et les nombres q, r,..... n'existeraient pas ; on aurait donc

$$f(k)=\frac{\left(\frac{m}{k}\right)!}{\left(\frac{m}{k}\right)!}=1\;;$$

toutes les fonctions désignées par f se réduiraient donc à l'unité ;

et, comme, dans ce cas, le nombre cherché doit évidemment être l'unité; il s'ensuit que, si l'on a un nombre m, tel que $m=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}....$; a, b, c, ... étant des nombres premiers inégaux, la suite dont le terme général sera égal à

$$a^{\alpha'-1}b^{\beta'-1}c^{\gamma'-1}......(a-1)(b-1)(c-1)......;$$

dans laquelle on admettra successivement pour α', β', γ', ...; toutes les valeurs entières, positives ou nulles qui n'excèderont pas respectivement α, β, γ, ..., sera égale au nombre m lui-même.

15. *Exemple.* Soit $D=a^2b$.

Les diviseurs de D seront, dans ce cas, les termes du développement du produit

$$(1+a+a^2)(1+b),$$

c'est-à-dire,

$$\begin{array}{cccc} 1; & a, & a^2, & a^2b. \\ & b, & ab & \end{array}$$

En représentant donc par x le nombre cherché, on aura

$$x=\frac{1}{m}f(1)+\frac{a-1}{m}f(a)+\frac{a(a-1)}{m}f(a^2)+\frac{a(a-1)(b-1)}{m}f(a^2b)$$
$$+\frac{b-1}{m}f(b)+\frac{(a-1)(b-1)}{m}f(a^2b)$$

c'est-à-dire;

$$x=\frac{1}{m}\cdot\frac{m!}{p!q!r!.....}+\frac{a-1}{m}\cdot\frac{\left(\frac{m}{a}\right)!}{\left(\frac{p}{a}\right)!\left(\frac{q}{a}\right)!\left(\frac{r}{a}\right)!....}$$
$$+\frac{b-1}{m}\cdot\frac{\left(\frac{m}{b}\right)!}{\left(\frac{p}{b}\right)!\left(\frac{q}{b}\right)!\left(\frac{r}{b}\right)!....}$$

$+\frac{(a-1)}{m}$

$$+\frac{a(a-1)}{m}\cdot\frac{\left(\frac{m}{a^2}\right)!}{\left(\frac{p}{a^2}\right)!\left(\frac{q}{a^2}\right)!\left(\frac{r}{a^2}\right)!\ldots}+\frac{a(a-1)(b-1)}{m}\cdot\frac{\left(\frac{m}{a^2b}\right)!}{\left(\frac{p}{a^2b}\right)!\left(\frac{q}{a^2b}\right)!\left(\frac{r}{a^2b}\right)!\ldots}$$

$$+\frac{(a-1)(b-1)}{m}\cdot\frac{\left(\frac{m}{ab}\right)!}{\left(\frac{p}{ab}\right)!\left(\frac{q}{ab}\right)!\left(\frac{r}{ab}\right)!\ldots}$$

16. *Application.* On demande de combien de manières différentes on peut arranger autour d'une table ronde 36 assiettes dont 12 de vermeil et 24 de porcelaine ?

On a ici $m=36$, $p=24$, $q=12$; d'où $D=12=2^2.3$; donc $a=2$, $b=3$, $\alpha=2$, $\beta=1$. En conséquence, la précédente formule deviendra

$$x=\frac{1}{36}\cdot\frac{36!}{24!12!}+\frac{1}{36}\cdot\frac{18!}{12!6!}+\frac{2}{36}\cdot\frac{9!}{6!3!}+\frac{4}{36}\cdot\frac{3!}{2!1!}$$

$$+\frac{2}{36}\cdot\frac{12!}{8!4!}+\frac{2}{36}\cdot\frac{6!}{4!2!}.$$

Le premier terme revient à

$$\frac{25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}=7.13.17.25.29.31.$$

Le second revient à

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{13.14.15.16.17}{2.3.4.5.6}=\frac{7.13.17}{3}.$$

Le troisième revient à

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{9.10.11}{2.3.4}=\frac{5.11}{2}.$$

Le quatrième revient à

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{7.8}{2.3}=\frac{2.7}{3}.$$

Le cinquième revient à

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2.3}\,;$$

Enfin, le sixième revient à

$$\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}\,.$$

La somme des termes fractionnaires revient à 549; et comme d'ailleurs le terme entier est 34768755; on a définitivement

$$x=34769304\,.$$

17. Nous placerons ici tous les résultats que l'on obtient jusqu'à $m=6$, pour les divers assemblages de lettres qu'on peut former sans excéder cette limite; ce sont aussi les résultats les plus usuels: nous y ajoutons en regard, sous la dénomination de y, le nombre des arrangemens rectilignes correspondans.

Pour P seul . . . . $x=1$, $y=1$;
Pour PQ . . . . $x=1$, $y=2$,
Pour PP . . . . $x=1$, $y=1$;
Pour PQR . . . . $x=2$, $y=6$,
Pour PPQ . . . . $x=1$, $y=3$,
Pour PPP . . . . $x=1$, $y=1$;
Pour PQRS . . . . $x=6$, $y=24$,
Pour PPQR . . . . $x=3$, $y=12$,
Pour PPQQ . . . . $x=2$, $y=6$,
Pour PPPQ . . . . $x=1$, $y=4$,
Pour PPPP . . . . $x=1$, $y=1$;
Pour PQRST . . . . $x=24$, $y=120$,
Pour PPQRS . . . . $x=12$, $y=60$,
Pour PPQQR . . . . $x=6$, $y=30$,
Pour PPPQR . . . . $x=4$, $y=20$,
Pour PPPQQ . . . . $x=2$, $y=10$,

Pour PPPPQ	$x = 1$,	$y = 5$,
Pour PPPPP	$x = 1$,	$y = 1$;
Pour PQRSTU	$x = 120$,	$y = 720$,
Pour PPQRST	$x = 60$,	$y = 360$,
Pour PPQQRS	$x = 30$,	$y = 180$,
Pour PPPQRS	$x = 20$,	$y = 120$,
Pour PPQQRR	$x = 16$,	$y = 90$,
Pour PPPQQR	$x = 10$,	$y = 60$,
Pour PPPPQR	$x = 5$,	$y = 30$,
Pour PPPQQQ	$x = 4$,	$y = 20$,
Pour PPPPQQ	$x = 3$,	$y = 15$,
Pour PPPPPQ	$x = 1$,	$y = 6$,
Pour PPPPPP	$x = 1$.	$y = 1$.

Il est essentiel de remarquer qu'ici nous regardons et devons regarder, en effet, comme arrangemens distincts deux arrangemens inverses l'un de l'autre ; deux arrangemens dont l'un devient l'autre, en le renversant le dessus en dessous ; deux arrangemens, en un mot, formés d'un même arrangement rectiligne qu'on aurait successivement ployé en cercle, en le courbant dans deux sens opposés.

18. Si, par exemple, on voulait savoir de combien de manières différentes trois hommes et trois femmes, sans distinction d'individu à individu, dans le même sexe, peuvent être placés au tour d'une table ronde ? Cette question se rapporterait au cas PPPQQQ de notre tableau, et conséquemment le nombre des arrangemens possibles serait 4.

19. Le premier terme de notre formule générale étant le nombre des arrangemens circulaires qui auraient lieu dans le cas où les périodes seraient impossibles, et les termes qui suivent celui-là étant tous positifs ; il en résulte cette conséquence, pour ainsi dire

paradoxale, que l'existence possible des périodes, loin de diminuer le nombre total des arrangemens, comme il semblerait résulter de ce que nous avons dit (7), le rend au contraire plus grand.

20. Ceux qui penseraient que la complication de nos méthodes n'est point suffisamment rachetée par l'utilité des résultats qu'on en obtient, montreraient par là qu'ils ignorent que tout problème de combinaison est en même temps un problème de probabilité ; et que, dans ceux du genre de celui-ci, le calcul intégral aux différences ne paraît pas pouvoir être d'un utile secours.

Les problèmes de combinaison sont d'ailleurs un sujet d'exercice d'autant plus utile, que rien n'est plus aisé que de commettre des paralogismes en essayant de les résoudre.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Combinaison.

I. COMBIEN de mots différens de n lettres peut-on faire, en prenant arbitrairement ces n lettres parmi m lettres, dont un nombre p pareilles à P, un nombre q pareil à Q, un nombre r pareil à R, et ainsi des autres ; ce qui donne $p+q+r+\dots=m$?

II. De combien de manières différentes peut-on choisir n lettres parmi m lettres, dont un nombre p pareilles à P, un nombre q pareilles à Q, un nombre r pareilles à R, et ainsi des autres ; ce qui donne $p+q+r+\dots=m$?

Problèmes de Géométrie.

I. Quel est le point de l'intérieur d'un triangle duquel menant des droites à ses sommets, ces droites le divisent en trois triangles équivalens ?

II. Quel est le point de l'intérieur d'un triangle duquel abaissant des perpendiculaires sur ses côtés, ces perpendiculaires le divisent en trois quadrilatères équivalens ?

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

De l'analise et de la synthèse, dans les sciences mathématiques (*) ;

Par M. GERGONNE.



1. DÉMONTRER *un théorème*, c'est en général prouver, par un raisonnement exact, que ce théorème est une conséquence inévitable d'un ou de plusieurs autres théorèmes antérieurement admis. *Résoudre un problème*, c'est en ramener la solution à celle d'un ou de plusieurs autres problèmes qu'on sait déjà résoudre.

2. Il suit de ces notions, généralement admises, qu'aucun théorème ne pourrait être démontré ni aucun problème résolu, et que conséquemment toute science certaine serait impossible, si tous les théorèmes avaient besoin de démonstration, et tous les problèmes de solution. Mais il existe heureusement des théorèmes dont il suffit de connaître l'énoncé pour en apercevoir la vérité, et des problèmes qu'il suffit également d'énoncer pour que chacun comprenne clairement ce qu'il faut faire pour les résoudre.

(*) Ce qu'on va lire n'est que le résumé de la doctrine développée dans un mémoire fort étendu, que l'académie de Bordeaux a bien voulu couronner en 1813, et dont je n'ai pu garder de copie.

3. Les théorèmes dont la vérité s'aperçoit à leur seul énoncé, sont ce qu'on appelle des *Axiomes ;* et les problèmes dont l'énoncé fait suffisamment comprendre de quelle manière ils doivent être résolus sont ce qu'on appelle *Pétitions*, *Demandes* ou *Postulatum*. Les axiomes et les demandes sont donc les bases de toutes nos connaissances ; par leur secours on parvient à des théorèmes et à des problèmes : ceux-ci conduisent à d'autres qui eux-mêmes en font éclore de nouveaux ; et c'est ainsi que l'édifice des sciences s'élève peu à peu (*)

4. Un théorème ou un problème peut résulter si prochainement, soit d'un autre théorème ou problème, antérieurement démontré ou résolu, soit d'un axiome ou d'une demande, qu'il suffise de l'énoncer à sa suite pour faire clairement apercevoir la liaison qui existe entre l'un et l'autre : un théorème ou problème qui dépend d'un autre d'une manière aussi immédiate en est dit un *Corollaire.*

5. Mais souvent un théorème à démontrer ou un problème à résoudre, quoique dépendant bien réellement de quelque autre

---

(*) Il n'entre point dans mon sujet d'examiner de quelle manière nous parvenons à l'intelligence des axiomes et des demandes ; mais, quelque parti que l'on veuille prendre à leur égard ; qu'on les exprime ou qu'on les sous-entende, dans les traités élémentaires ; il n'en est pas moins vrai *que tout théorème* qui ne peut se réduire à un ou plusieurs axiomes est une proposition fausse ; et que tout problème qu'on ne saurait faire dépendre de quelques demandes est un problème tout-à-fait insoluble.

Au surplus, parmi les axiomes, on doit aussi ranger les définitions. Elles ne sauraient, en effet, être contestées ; car les mots n'ayant d'eux-mêmes aucune signification, il est toujours permis d'en fixer arbitrairement l'acception.

On comprend, d'ailleurs, par la manière dont je m'exprime ici, que je n'entends parler que des *définitions de nom ;* mais c'est que je crois aussi qu'il n'y en a proprement que de cette sorte, dans les sciences spéculatives.

Il n'est qu'un seul cas, je crois, où les définitions ne soient point libres : c'est celui où se trouvent les auteurs de vocabulaires. Leur tâche n'est point en effet d'expliquer le sens qu'ils attachent aux mots ; mais bien celui que toute une nation y attache.

théorème ou problème déjà démontré ou résolu, n'a point avec lui une liaison aussi apparente. Alors, pour rendre manifeste la dépendance entre l'un et l'autre, il devient nécessaire de combler l'intervalle qui les sépare par une suite plus ou moins étendue d'autres théorèmes ou problèmes, tels qu'on puisse dire de chacun qu'il est un corollaire de celui qui le précède et qu'il a pour corollaire celui qui le suit. Il est évident, en effet, qu'au moyen de ce procédé la liaison entre les propositions extrêmes se trouvera solidement établie. C'est dans le choix tant du point de départ que des intermédiaires que consiste proprement l'art de démontrer les théorèmes et de résoudre les problèmes (*).

6. Supposons que, cette liaison étant déjà établie, il soit question de montrer à quelqu'un comment un théorème de la vérité duquel il doute encore se trouve dépendre d'un autre théorème qu'il a déjà admis, ou comment un problème qu'il ne sait point encore résoudre se ramène à d'autres dont il connaît déjà la solution; il est clair qu'il faudra pour cela lui faire faire une revue exacte des intermédiaires qui lient l'un à l'autre; et lui montrer que, dans la chaîne de ces intermédiaires, deux propositions consécutives quelconques sont une conséquence nécessaire l'une de l'autre (**).

(*) On doit remarquer ici que, dans une science, il est peu de proposition qui ne puisse être considérée comme une espèce de centre où viennent également concourir les conséquences d'une multitude d'autres propositions, dont chacune conséquemment pourrait, à son tour, être prise pour point de départ dans le raisonnement qui doit établir l'autre. De plus, le choix de la proposition de laquelle on veut partir pour parvenir à une proposition nouvelle étant fait, on peut souvent aller de l'une à l'autre par une multitude de routes diverses; et c'est par l'effet de ces deux causes qu'un même théorème peut souvent être démontré et un même problème résolu de tant de manières différentes. L'art de choisir entre ces divers procédés de démonstration et de solution étant étranger à l'objet que je me propose ici, je ne m'y arrêterai pas.

(**) Il n'est point hors de propos de remarquer que, le plus souvent, deux propositions consécutives ne sont une conséquence nécessaire l'une de l'autre

7. Mais il est clair que cette revue peut être faite dans deux sens différens ; et qu'on peut établir une vérité nouvelle soit en montrant qu'elle est une conséquence inévitable d'autres vérités déjà admises, soit en faisant voir, au contraire, qu'elle se réduit au fond à ces mêmes vérités.

8. Ces deux manières inverses de procéder ont reçu, dès la plus haute antiquité, des dénominations différentes. On a appelé *Synthèse* ou *Méthode synthétique*, le procédé par lequel on s'élève, par degrés, des vérités les plus élémentaires à celles qui le sont moins; et on a appelé *Analise* ou *Méthode analitique*, la méthode qui consiste, au contraire, à redescendre des vérités les plus élevées aux plus élémentaires, dans la vue de faire voir que les premières se réduisent au fond à celles-ci. Ces deux méthodes font donc parcourir la même route, mais dans des directions tout-à-fait inverses; et elles n'ont absolument aucun avantage l'une sur l'autre, soit sous le rapport de la rigueur, soit sous celui de la brièveté.

9. Pour faire apercevoir plus clairement la marche et le caractère propre de ces deux méthodes, appliquons-les successivement aux théorèmes et aux problèmes. Soient en premier lieu E une vérité à établir, A une vérité dont on veut la faire dépendre, et B, C, D les intermédiaires qu'on a choisis pour les lier l'une à l'autre.

---

qu'en vertu de quelque autre proposition, exprimée ou sous-entendue, que l'on peut considérer comme auxiliaire ou collatérale de celles qui forment proprement la chaîne du raisonnement.

On peut remarquer aussi qu'il n'est point généralement vrai, comme quelques métaphysiciens l'ont voulu prétendre, que les propositions dont un raisonnement se compose soient toutes équivalentes, et ne diffèrent uniquement que par l'expression. Cela arrive bien quelque fois; mais souvent aussi, si une proposition renferme celle qui la suit, celle-ci, à son tour, ne renferme pas l'autre, parce qu'elle n'en est qu'un cas particulier.

On peut, au surplus, consulter, sur tout ceci, la page 296 de ce volume.

La démonstration synthétique du théorème E aura la forme que voici :

Si A est vraie, B le sera aussi ;

Si B est vraie, C le sera aussi ;

Si C est vraie, D le sera aussi ;

Si D est vraie, E le sera aussi ;

Or, A est vraie,

Donc E l'est aussi.

La démonstration analitique du même théorème aurait, au contraire, la forme suivante :

E serait vraie, si D l'était ;

D serait vraie, si C l'était ;

C serait vraie, si B l'était ;

B serait vraie, si A l'était ;

Or, A est vraie ;

Donc E l'est aussi.

10. Supposons, en second lieu, qu'il soit question de résoudre

un problème; que E soit la chose qu'il s'agit de trouver; A une chose qu'on sait trouver et au moyen de laquelle on veut parvenir à l'autre; enfin B, C, D, les choses à l'aide desquelles on s'est déterminé à établir la liaison entre celles-là. La solution synthétique du problème aura la forme que voici:

A étant connue, on peut trouver B;

B étant connue, on peut trouver C;

C étant connue, on peut trouver D;

D étant connue, on peut trouver E;

Or, on sait trouver A;

Donc on sait trouver E.

Si, au contraire, on voulait procéder analitiquement, il faudrait raisonner de cette autre manière:

E sera connu, si l'on sait trouver D;

D sera connu, si l'on sait trouver C;

C sera connu, si l'on sait trouver B;

B sera connu, si l'on sait trouver A;

Or, on sait trouver A;

Donc on sait trouver E.

11. Il paraît évident, d'après ces notions, consacrées depuis vingt siècles, que lorsqu'on sait bien par quels intermédiaires les vérités, soit théoriques soit pratiques, sont enchaînées les unes aux autres; on peut toujours, à volonté, dans l'exposition de ces vérités, suivre la méthode analitique ou la méthode synthétique. Il n'est pas moins évident que rien n'est plus aisé que de rendre analitique une démonstration ou une solution synthétique, et *vice versa*. Enfin l'on conçoit qu'on peut même, dans l'exposition de la vérité, mélanger entre elles ces deux méthodes d'une multitude de manières diverses. Ainsi, par exemple, si A est une vérité élémentaire de laquelle on se propose de déduire une autre vérité U, d'un ordre plus élevé, et que K soit une des vérités intermédiaires par lesquelles on veut parvenir de l'une à l'autre; on pourra s'élever synthétiquement de A à K et descendre ensuite analitiquement de U à K; ou bien on pourra descendre d'abord analitiquement de K à A, et monter ensuite synthétiquement de K à U.

12. Il paraît donc incontestable que l'analise est, tout aussi bien que la synthèse, une *méthode de doctrine*; que chacune de ces deux méthodes est de nature à se suffire à elle-même; et qu'enfin, lorsqu'on les emploie concurremment dans un même raisonnement, il suffit, à la rigueur, que l'une d'elles parcourre tout l'espace que l'autre n'aura pas parcouru (*).

13. Mais remarquons bien que nous n'avons encore considéré,

(*) Toutefois, comme nous ne saurions compter assez sur notre attention pour être certain de ne jamais nous tromper, dans un raisonnement un peu étendu, il peut être bon, et il est même très-convenable de vérifier, par l'une des deux méthodes, les résultats obtenus par l'autre; à peu près comme le calculateur s'assure, par un calcul inverse, de l'exactitude d'un premier calcul qu'il vient de terminer; mais il ne faut pas confondre une simple mesure de précaution et de prudence, avec l'essence de la méthode nécessaire pour parvenir à un certain résultat, et regarder cette mesure comme en faisant essentiellement partie.

dans tout ce qui précède, que le cas où il s'agit d'enseigner à autrui des vérités déjà découvertes, et dont l'enchaînement est bien connu. Voyons présentement de quelle manière on devra se conduire dans le cas où, au contraire, il s'agira d'ajouter des vérités nouvelles aux vérités déjà decouvertes, et d'élever ainsi, de plus en plus, l'édifice de nos connaissances.

14. Ici il se présente deux cas très-distincts; tantôt, en effet, on n'a d'autre but que de découvrir des vérités nouvelles sans en avoir spécialement aucune en vue; tandis que d'autres fois, au contraire, l'analogie ou le besoin nous conduit à pressentir quelque vérité dont nous désirons nous assurer, sans savoir précisément à quelle vérité antérieurement établie elle peut se rattacher, ou à désirer la solution de quelque problème, sans connaître de quel problème déjà résolu on peut le faire dépendre.

15. Dans le premier cas, c'est-à-dire, lorsqu'on n'est mu que par le désir vague de parvenir à des vérités nouvelles, ce qu'il y a de mieux à faire est sans doute de tirer des vérités déjà découvertes, toutes les conséquences qui pourront en être déduites, dans l'espoir d'en rencontrer quelques-unes qui soient dignes de remarque; c'est-à-dire qu'il faut s'abandonner alors à la *méthode synthétique*. Mais on conçoit que, dans ce cas même, on ne saurait se promettre des fruits précieux de cette méthode si elle n'est employée avec un talent convenable. Elle conduira bien, de quelque manière qu'on l'emploie, à des vérités nouvelles; mais toutes les vérités nouvelles ne sont point également dignes de remarque; et il serait fort possible qu'on n'en rencontrât aucune qui valût la peine d'être remarquée. Voilà aussi, sans doute, pourquoi, dans le grand nombre de ceux qui cultivent les sciences, il en est si peu qui leur fassent faire des progrès de quelque importance.

16. Dans le cas où, au contraire, on a besoin de s'assurer, en particulier, de la vérité d'une certaine proposition, ou de parvenir à la découverte d'une chose inconnue; on ne voit guère d'autre moyen de parvenir au but, s'il s'agit d'un théorème à démontrer, que

que d'en faire passer l'énoncé par une suite de traductions de plus en plus simples, et qui soient telles que chaque énoncé nouveau, supposé vrai, entraîne la vérité de celui dont il est la traduction immédiate, en continuant ainsi, jusqu'à ce qu'on arrive à quelque proposition de la vérité de laquelle on se soit préalablement assuré. Est-il question, au contraire, de résoudre un problème? on tentera de ramener la découverte de la chose cherchée à celle d'une autre chose, la découverte de celle-ci à celle d'une troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une chose qu'on ait antérieurement appris à trouver; d'où l'on voit que, dans l'un et dans l'autre cas, c'est la *méthode analitique* qu'il convient ici de préférer (*). Mais on conçoit qu'ici encore on pourra passer éternellement de traduction en traduction sans rencontrer sur sa route aucun théorème antérieurement démontré ou aucun problème antérieurement résolu. Ainsi, dans la découverte de la vérité, on ne saurait se promettre plus de succès de l'analise que de la synthèse, si cet instrument de découverte n'est manié, tout comme l'autre, par une main habile et exercée. Voilà sans doute pourquoi tant de problèmes sont demeurés jusqu'ici, et demeureront encore long-temps peut-être sans être résolus.

17. Dans l'exposition des vérités déjà découvertes, on tient entre ses mains la chaîne du raisonnement, et il n'est question que de la montrer à ceux qu'on enseigne, et de leur faire parcourir successivement les divers anneaux qui la composent, ce qui se peut faire d'un grand nombre de manières diverses, partie dans un sens et partie dans un autre. Mais, dans la recherche des vérités nouvelles, on n'a plus la même liberté. On ne connaît alors, en effet, que l'une des deux extrémités de cette chaîne; et, suivant que

(*) C'est Platon qui, au rapport de Théon d'Alexandrie, a enseigné le premier aux géomètres de la Grèce cette manière de raisonner.

c'est le premier ou le dernier anneau qui est connu ; c'est la synthèse ou l'analise qu'il faut employer.

18. On a comparé, avec beaucoup de vérité, ces deux méthodes à celles qu'on peut suivre dans la recherche et dans l'exposition des généalogies. Il est certain, en effet, que celui qui connaît bien une généalogie, pourra indifféremment la faire connaître aux autres en descendant sans cesse du père au fils ou en remontant sans cesse du fils au père ; mais il n'en sera plus ainsi s'il veut lui-même découvrir une généalogie qui lui est inconnue. Il est évident, en effet, que ce sera uniquement en descendant sans cesse du père au fils qu'il parviendra à connaître les descendans actuels d'un homme qui a vécu dans des temps antérieurs ; tandis que ce sera au contraire en remontant sans cesse du fils au père qu'il pourra découvrir quels devaient être, à une époque éloignée, les ancêtres d'un homme vivant qu'on lui désigne.

19. Il paraît résulter clairement de ces notions que, de même que l'analise est, tout aussi bien que la synthèse, une méthode de doctrine, la synthèse est à son tour, tout aussi bien que l'analise, une *méthode d'invention* (*) ; mais, tandis que, dans l'exposition des vérités déjà découvertes, ces deux méthodes peuvent être indistinctement employées ; on est forcé, au contraire, dans la poursuite des vérités nouvelles, d'employer exclusivement l'une ou l'autre, suivant que les recherches auxquelles on se livre ont un objet vague ou qu'elles sont relatives à une question déterminée. On voit enfin que, quelle que puisse être celle de ces deux méthodes que l'on se détermine à employer, dans quelque recherche que ce soit, son usage ne saurait jamais garantir le succès.

(*) Je serais même tenté de considérer la synthèse comme étant, plus proprement encore que l'analise, une méthode d'invention ; tant parce qu'il n'est rien de ce qui a été découvert par l'analise qui n'ait pu l'être également par la synthèse, que parce que le hasard, le plus puissant et le plus universel de tous les agens de découverte, procède toujours synthétiquement.

20. Dans la doctrine que je viens de développer, j'ai employé les mots *synthèse* et *analise* suivant l'acception qu'on leur a uniformément et constamment donnée, jusqu'à la moitié du dix-huitième siècle (*). C'est aussi celle qui est la plus rapprochée de l'étymologie de ces deux mots (**). Mais depuis lors Condillac et les métaphysiciens de son école ont tellement embrouillé toutes ces notions qu'il n'est pas surprennant qu'on soit obligé aujourd'hui d'exposer, avec beaucoup de soin et de détail, des notions qui auraient pu peut-être passer pour triviales il y a environ un siècle. Examinons donc, et réduisons, s'il se peut, à sa juste valeur, la doctrine professée, sur l'analise et la synthèse, par le chef de cette secte philosophique, dans l'ouvrage où il prétend nous donner les seuls véritables préceptes sur l'art de penser; et que ses trop dociles disciples ont cru un moment, sur sa parole, devoir produire une révolution dans l'esprit humain.

21. Mais la doctrine de Condillac sur ce point est d'un examen d'autant plus embarrassant et plus difficile, qu'après avoir lu son livre en entier, on ne voit pas encore bien clairement ce qu'il entend proprement par analise et par synthèse; tout ce qu'on peut en recueillir, c'est qu'il professe pour la dernière de ces deux méthodes le mépris le plus profond, et qu'il regarde l'autre, au contraire, comme la méthode unique, la méthode par excellence; et on a d'autant plus

(*) Voyez, entre autres, l'*Essai sur l'enseignement* de M. Lacroix, page 234.

(**) A s'en tenir à l'étymologie, le mot synthèse veut dire *composition*, et le mot analise *résolution*; et, sous cette acception, ce n'est guère qu'en chimie, qu'ils peuvent être rigoureusement appliqués; parce que ce n'est guère que là qu'on rencontre des compositions et des décompositions proprement dites. Un chimiste qui combine des substances simples pour en former un mixte, fait proprement une opération synthétique; tandis qu'au contraire, s'il résout un mixte en ses principes, il fait une véritable analise. Hors de là il faut, dans l'emploi de ces mots, se tenir constamment en garde contre l'abus des comparaisons, qui est une des sources d'erreurs les plus communes.

lieu d'en être surpris que d'une part il considère quelquefois ces deux méthodes comme n'en faisant qu'une, et que d'une autre il confesse ne rien comprendre à la première.

22. On serait même fort tenté de croire que Condillac donne aux mots *synthèse* et *analise* des acceptions tout-à-fait différentes de celles que nous avons adoptées ici (*); si on ne le voyait chercher l'idée qu'on doit attacher à ces mots dans la *Logique de Port-Royal*, qui professe, sur ce sujet, une doctrine tout-à-fait conforme à la nôtre (**).

23. Cependant Condillac nous dit sans cesse, sur l'analise et sur la synthèse, des choses qui semblent ne pouvoir aucunement leur convenir. Suivant lui, analiser c'est tantôt observer successivement et avec ordre, et d'autres fois c'est décomposer et recomposer. Nous avons pourtant vu (8) que la synthèse, aussi bien que l'analise, observait successivement et avec ordre; mais nous avons vu aussi que l'art de décomposer appartenait exclusivement à l'analise et celui de composer à la synthèse.

24. Suivant Condillac, il appartient à la synthèse de décomposer comme de composer; et il appartient à l'analise de composer comme de décomposer (Part. II, chap. VI); et il serait absurde, ajoute-t-il, d'imaginer qu'on pût raisonner en *s'interdisant*,

---

(*) Soit qu'on s'occupe de la recherche de quelques vérités nouvelles, soit qu'on veuille prouver à autrui une vérité déjà découverte, il n'y a et il ne saurait y avoir qu'une seule méthode, disent également *Hobbes* et *Condillac*. Mais quelle est cette méthode unique? c'est la *synthèse* suivant Hobbes, et c'est l'*analise* suivant Condillac.

(**) Pour faire comprendre la différence entre l'analise et la synthèse, les auteurs de la *Logique de Port-Royal* se sont servis de deux comparaisons, dont la seconde est incomparablement plus claire que la première. Condillac cite tout justement celle-ci, et garde sur l'autre le silence le plus absolu (II.e partie, chap. VI). Il faudrait, je l'avoue, un grand fond de bon vouloir, pour voir là quelque chose de moins qu'une insigne mauvaise foi.

à son choix; toute composition ou toute décomposition. On a vu pourtant (11) qu'on peut, à volonté, rendre synthétique un raisonnement analitique, et analitique un raisonnement synthétique; et (12) que chacun de ces deux modes de raisonnement se suffit complètement à lui-même.

25. Condillac reconnaît (même chap.) que l'analise et la synthèse sont deux méthodes inverses l'une de l'autre; mais il en tire cette étrange conclusion que, si l'une d'elles est bonne, l'autre est nécessairement mauvaise. Comment donc n'a-t-il pas vu, ou plutôt, comment n'a-t-il pas voulu voir qu'on rencontre à chaque pas, dans la plupart des sciences, des méthodes tout-à-fait contraires, que l'on emploie pourtant avec un avantage à peu près égal? Et, pour n'en citer qu'un exemple, niera-t-on que les deux fameuses expériences par lesquelles on prouve que l'eau n'est point une substance simple ne soient également concluantes, et que chacune d'elles ne mette, à elle seule, cette vérité dans tout son jour?

26. Suivant Condillac (Part. II, chap. VIII), toutes les questions sont également faciles, lorsqu'on a les données suffisantes pour les résoudre; mais, à ce compte, pourquoi donc les efforts réunis des plus grands géomètres n'ont-ils pu encore, par exemple, triompher des difficultés que présente la résolution des équations du 5.me degré? Sont-ce là les données qui manquent? non sans doute; mais c'est que, comme nous l'avons déjà fait voir (19), ni l'analise ni la synthèse ne sont et ne sauraient être des méthodes infaillibles.

27. Condillac attribue, avec raison, à l'analise (Part. II, chap. VII) les immenses progrès qu'ont fait les sciences mathématiques dans ces derniers temps; mais d'abord, s'il regarde comme synthétiques les méthodes suivies par les géomètres de l'antiquité, il faudra reconnaître que, si la marche de la synthèse est plus lente que celle de l'analise, elle est tout au moins aussi sure, et très-certainement plus lumineuse. Si même on considère que nous n'avons fait que continuer ce que les anciens ont commencé, et qu'en toutes choses les premiers pas sont toujours les plus difficiles, on

sera tenté d'accorder la préférence à la synthèse, qui a fait faire aux géomètres de l'antiquité tant de difficiles découvertes.

28. Mais il y a, dans tout ceci, une équivoque qu'il est d'abord nécessaire de lever. Ce qu'on appelle vulgairement algèbre se compose de deux parties tout-à-fait distinctes : l'une enseigne à soumettre au calcul les grandeurs indéterminées, tandis que l'autre se borne à enseigner à résoudre des problèmes à l'aide des équations. Cette dernière partie a été la première inventée, et on lui a donné le nom d'*analise algébrique*, parce que les procédés sont en tout semblables à ceux de l'analise logique. L'autre partie de l'algèbre, au contraire, n'ayant été créée que peu à peu, on n'a pas songé à lui donner un nom particulier ; on l'a regardée simplement comme une sorte de perfectionnement accessoire de l'*analise algébrique*, dont elle a continué à conserver le nom ; et c'est ainsi qu'en mathématiques les mots *algèbre* et *analise* ont long-temps été réputés, et sont encore regardés aujourd'hui par beaucoup de gens, comme exactement synonymes. Par opposition, les géomètres ont appelé synthétique toute méthode mathématique dans laquelle on parvient à son but sans faire aucun usage des symboles algébriques.

29. Mais, si l'on veut conserver aux mots *synthèse* et *analise* l'acception universellement admise, on sera forcé de reconnaître que ce qu'on appelle vulgairement en mathématiques *algèbre* ou *analise* se compose de deux parties essentiellement distinctes, qui sont l'art de calculer les grandeurs indéterminées et l'art de résoudre les problèmes à l'aide des équations. La première de ces deux parties, plus synthétique qu'analitique, pourra conserver le nom d'algèbre (*) ;

(*) On comprend assez par là que je ne pense pas qu'il soit nécessaire, ni même convenable de commencer un traité d'algèbre par la résolution analitique d'un problème ; parce que ce n'est point en cela proprement que l'algèbre consiste. Je ne la fais pas même consister dans l'emploi des signes indicateurs des opérations ; signes qui lui sont, à la vérité, indispensablement nécessaires,

et l'on donnera, si l'on veut, à l'autre, le nom d'*analise algébrique*; quoique dans le fait cette analise soit purement *arithmétique*, du moment que les seules inconnues sont représentées par des lettres. Il sera nécessaire de reconnaître aussi qu'on fait très-souvent de la synthèse en algèbre, même en employant les équations; tandis que des recherches de géométrie pure sont, le plus souvent, conduites par l'analise, ainsi qu'un examen attentif des ouvrages tant des géomètres de l'antiquité que de ceux d'entre les modernes qui ont marché sur leurs traces, le prouve victorieusement.

3o. Condillac dit encore que les langues sont des méthodes analitiques; que toute science se réduit à une langue bien faite; et que c'est parce que l'algèbre est une langue de cette nature, et même une langue qu'on ne pouvait mal faire, que son usage a si puissamment contribué au progrès des sciences mathématiques; d'où il tire cette conséquence que, pour parvenir, dans toutes les autres sciences, à la certitude rigoureuse que personne ne conteste à celle-là, il ne s'agit uniquement que d'en refaire la langue.

---

mais qui ne lui appartiennent pas plus qu'à l'arithmétique, dans laquelle je pense même qu'on ferait fort bien de les introduire généralement. Cette algèbre; que j'appellerais plus volontiers *calcul algorithmique*, réside essentiellement dans la représentation des grandeurs par des symboles indéterminés.

Je sais bien qu'on m'objectera que je m'écarte ici de la marche réellement suivie par les inventeurs; et que l'invention de ce que j'appelle exclusivement algèbre est bien postérieure à l'analise de Diophante; mais cette objection ne saurait m'arrêter; parce que je ne pense pas qu'il soit le moins du monde nécessaire de se conformer dans l'exposition de quelque doctrine que ce puisse être à l'ordre chronologique des découvertes. Il est sans doute d'une haute importance de s'assujettir, dans l'enseignement des sciences, à l'esprit d'invention; mais comme une même science pouvait, suivant les circonstances et la variété des esprits, être inventée d'une multitude de manières diverses; celui qui veut en développer les principes doit choisir, entre toutes les manières de l'inventer, celle qui peut le mieux se concilier avec l'ordre et la symétrie, et en rendre l'étude aisée et profitable.

31. Mais d'abord, comme, excepté les noms propres et ceux des idées simples, tous les mots de nos langues expriment des collections, des combinaisons d'idées, que nous avons nous-mêmes formées avec des idées simples; on serait tout aussi bien fondé à regarder les langues comme des méthodes synthétiques qu'à les envisager comme des méthodes analitiques. Quoi qu'il en puisse être d'ailleurs, ces langues sont bien réellement des méthodes, et même des méthodes extrêmement précieuses; mais dont le caractère essentiel et distinctif consiste à remplacer les objets de nos pensées par des signes purement arbitraires et conventionnels, n'ayant avec eux aucune liaison nécessaire; et, comme on en use de même en algèbre, il est très-vrai de dire que l'algèbre est aussi une *langue*; mais, puisque cette langue s'est perfectionnée peu à peu, et se perfectionne même encore tous les jours, il s'ensuit *qu'il est faux* de dire qu'on ne pouvait la mal faire. Si, en effet, il en était ainsi, elle aurait dû recevoir d'un premier jet toute la perfection dont elle est susceptible.

32. A la vérité, si, dès l'origine, l'algèbre n'a point été et n'a point pu être une langue parfaite, elle n'en a pas moins été une langue exacte et rigoureuse; mais, prétendre que c'est à l'exactitude de cette langue que tient la rigueur des vérités mathématiques, c'est, ce nous semble, prendre l'effet pour la cause et *vice versa*. Si, en effet, on a pu rendre, dès l'origine, la langue algébrique tout-à-fait rigoureuse; c'est que cette langue n'avait à exprimer que des objets et des rapports abstraits, tout-à-fait simples et nettement circonscrits. Aussi raisonnait-on déjà très-rigoureusement sur ces objets, au moyen de la langue vulgaire, bien avant l'invention de celle-là, qui n'a fait que rendre les raisonnemens plus aisés, en les rendant plus concis, et en les ramenant à des règles presque mécaniques.

33. Loin donc que l'extrême rigueur que personne n'a jamais songé à contester aux sciences mathématiques ait sa cause dans la perfection du langage de ces sciences; il y a beaucoup plus d'apparence que c'est au contraire à cause de l'extrême simplicité des

objets

objets auxquels ces sciences sont relatives, qu'on a pu parvenir à donner tant de précision à la langue qui en exprime la nature et les propriétés. Mais, du moment que nous voudrons porter nos méditations sur d'autres objets moins simples et moins abstraits, sur des objets réels existant hors de nous, et dont nous ne pouvons apercevoir que les propriétés les plus apparentes, nous aurons beau faire et refaire la langue, nous aurons beau recourir à tout autre expédient quelconque; nous n'atteindrons jamais à une rigueur comparable à celle qu'on rencontre dans les sciences mathématiques (*).

34. Condillac enfin répète, presque à chaque page de sa logique; qu'*on ne peut aller que du connu à l'inconnu*; s'il veut dire par là qu'il faut nous prendre à ce que nous savons pour nous conduire à ce que nous ne savons pas encore; c'est très-certainement une grande vérité, mais qui, par là même était à peu près inutile à dire (**) : Apollonius comme Euler, Archimède comme Lagrange,

(*) On a voulu, il y a une trentaine d'années, suivant le précepte de Condillac, refaire la langue de la chimie; mais c'est le progrès de la science qui avait précédé et amené cette réforme: a-t-elle rendu cette science plus rigoureuse? Non, sans doute; des découvertes postérieures ont montré que la nouvelle langue avait été mal faite, sous beaucoup de rapports; et les chimistes d'aujourd'hui mettent une partie de leur soin à corriger le travail de leurs prédécesseurs, en attendant que les chimistes à venir leur rendent à eux-mêmes un semblable service. Qu'en faut-il conclure? C'est que le progrès de la science n'est pas tant l'effet que la cause du perfectionnement de la langue qui lui est propre. La bonne composition de la langue d'une science peut sans doute contribuer puissamment à en faciliter l'étude, tout comme, en mathématiques, des notations bien appropriées à la question dont on s'occupe, en font plus aisément rencontrer la solution; mais, de même qu'en algèbre, on peut calculer exactement avec des notations mal choisies; il est possible également, lorsque la nature des objets le permet, de raisonner rigoureusement avec une langue très-imparfaite; et les travaux des anciens géomètres en offrent une preuve manifeste.

(**) Il faut pourtant la répéter aux grammairiens, aux praticiens qui écrivent

n'ont jamais prétendu nous instruire par une autre voie. Mais, comme Condillac dit quelque part que l'analise commence toujours bien, tandis que la synthèse commence toujours mal; on est fondé à soupçonner qu'il pense que l'analise seule va du connu à l'inconnu, tandis qu'au contraire la synthèse va de l'inconnu au connu.

35. La vérité est pourtant que c'est précisément l'inverse; que, s'il est une méthode de laquelle on puisse dire, en quelque sorte, qu'elle va de l'inconnu au connu, c'est tout justement l'analise, tandis que la synthèse, au contraire, procède constamment du connu à l'inconnu. Cette dernière méthode, en effet, comme nous l'avons déjà remarqué (8), s'élève peu à peu des vérités les plus simples et les plus populaires aux plus sublimes conceptions auxquelles il soit possible à l'esprit humain de parvenir; tandis que l'autre, au contraire, redescend par degrés de celles-ci aux notions triviales dans lesquelles toute proposition vraie doit se résoudre en effet.

36. La seule manière de faire de la logique de Condillac un ouvrage raisonnable serait, à ce qu'il nous paraît, d'y remplacer partout les mots *analise* et *synthèse*, par ces expressions : *bonne méthode* et *mauvaise méthode*; mais, par cette substitution même, on en ferait un ouvrage tout-à-fait inutile; puisqu'il se réduirait à dire que, dans toutes recherches, il faut *soigneusement s'attacher* aux bonnes méthodes, et éviter les mauvaises; ce que personne jusqu'ici n'a probablement encore songé à contester.

37. Nous désirons bien sincèrement que ces réflexions puissent contribuer à détruire l'illusion et l'espèce d'engouement peu philosophique qu'a produit, dans sa nouveauté, la logique de Condillac;

---

sur la musique, aux arpenteurs qui écrivent sur la géométrie, et aux négocians et financiers qui écrivent sur l'arithmétique. Tous ces gens-là, dans leurs ouvrages, supposent d'ordinaire le lecteur très au courant de ce qu'ils se proposent de lui apprendre.

engouement que le talent supérieur de quelques-uns des disciples de ce métaphysicien célèbre, beaucoup plus que le mérite intrinsèque de sa doctrine, a contribué à entretenir. Peut-être se convaincra-t-on, en lisant ceci, que Condillac n'est point un guide aussi sûr et aussi utile qu'il a l'air de l'insinuer dans le dernier chapitre de son ouvrage ; et que, parmi les philosophes qui l'ont précédé, et qu'il traite avec un dédain si superbe, il en est qui ont vu, avant lui, et peut-être mieux que lui, en quoi consiste réellement tout l'artifice du raisonnement. Puisse-t-on aussi se dégoûter enfin de la manie d'employer le mot *analise* en toutes rencontres, sans aucune sorte de discernement (*).

38. Dans le premier chapitre d'un ouvrage très-recommandable, sous beaucoup de rapports (**) ; M. Carnot a exposé, sur l'analise

---

(*) Aujourd'hui, le métaphysicien qui divise un sujet compliqué en ses parties et celui qui forme des groupes d'idées auxquels il impose des noms, regardent également des opérations si différentes comme des *analises*. Le commentateur qui développe longuement le texte d'un livre, et l'abréviateur qui, dans un cadre réserré, nous en offre la substance, prétendent l'un et l'autre l'avoir *analisé*. Le naturaliste qui décrit une plante ou un insecte, tel que la nature l'offre à nos regards, et le chimiste qui, après en avoir détruit l'organisation, en met à nu les principes constitutifs, sont également réputés avoir fait une *analise*. On *analise* des pièces de théâtre, des procès, des arrêts, etc. On flatte l'amour-propre d'un homme en disant de lui qu'il a l'*esprit analitique* ; et un auteur qui veut attirer sur son ouvrage les regards et l'attention du public, ne manque guère d'y écrire en tête : *Traité analitique*. Certes, si les mots sont autant de signes institués pour différentier et distinguer nos idées les unes des autres, je ne vois pas ce qu'on peut gagner à tout appeler du même nom ? Et quand même on voudrait s'obstenir à voir quelque chose d'analitique dans tous les actes de notre intelligence ; on ne serait pas mieux fondé à les désigner tous par la dénomiation commune d'analise que pourrait l'être un bibliothécaire à n'écrire uniquement que le mot *livre* au dos de chacun des nombreux volumes d'un vaste dépôt littéraire qui serait commis à sa surveillance.

(**) *Géométrie de position*, in-4.°, Paris, 1803, pages 9 et suivantes.

et sur la synthèse ; une doctrine qui lui est propre ; et qui n'a pas plus d'analogie avec celle de Condillac qu'avec la notre. Pour ne rien laisser à désirer sur le sujet qui nous occupe, nous croyons devoir, en terminant, faire quelques réflexions sur cette doctrine. Mais ici du moins nous ne rencontrerons pas des embarras pareils à ceux que nous a donné l'examen des principes de Condillac : M. Carnot, dans l'ouvrage cité, expose sa doctrine de la manière la plus franche et la plus lumineuse.

39. Mais cet illustre géomètre semble ignorer, dès l'abord, ce que pourtant, nous en sommes bien sûrs, il sait tout aussi bien que nous. Nous voulons dire qu'il semble croire que les mots synthèse et analise ont une signification intrinsèque, tout-à-fait indépendante des conventions humaines, et il a l'air de vouloir chercher quelle peut être cette signification (*). Qu'on se détermine à donner à *telle* méthode le nom d'analise, et à telle autre le nom de synthèse ; rien de plus libre et de plus légitime sans doute; mais se demander sérieusement ce que c'est que la synthèse et ce que c'est que l'analise, c'est, ce nous semble, une question à laquelle il est impossible de faire une réponse raisonnable.

40. Pour établir sa doctrine, M. Carnot pose d'abord en principe que l'analise doit être une méthode très-différente de la synthèse ; qu'elle doit lui être de beaucoup supérieure ; et qu'enfin elle doit être en entier l'ouvrage des modernes. Mais on ne conçoit pas trop sur quel fondement il a pu appuyer ces assertions. Il est certain du moins que les anciens employaient une manière de raisonner qu'à tort ou à raison ils avaient appelée analise ; et si l'école de Condillac a considéré l'analise comme une invention moderne,

---

(*) Cette erreur, très-fréquente chez les philosophes, paraît avoir sa source dans l'habitude où l'on est d'admettre des *définitions de choses*. Si l'on se persuadait bien qu'il n'y a réellement, dans les sciences abstraites, que des *définitions de noms*, on éviterait bien des embarras et bien des erreurs.

bien supérieure à la synthèse ; on verra bientôt que l'analise de Condillac n'a absolument rien de commun avec celle de M. Carnot, dont Condillac ne pouvait même avoir aucune idée.

41. Ces principes une fois posés, M. Carnot passe successivement en revue toutes les diverses idées qu'on pourrait se former de l'analise ; il observe d'abord, avec beaucoup de fondement, à ce qu'il nous paraît, que l'analise ne saurait consister dans l'emploi des signes abréviatifs ; puisqu'alors, par exemple, l'écriture sténographique devrait être réputée un procédé analitique. Nous ajouterons qu'il en devrait être de même des formes elliptiques si souvent employées dans le discours. Il est certain, en effet, que, quelque inappréciable que soit l'avantage des signes abrégés ; le plus ou le moins de brièveté des symboles par lesquels nous représentons nos pensées ne saurait constituer une différence de méthodes, lorsque d'ailleurs il n'y a rien de changé dans la forme du raisonnement.

42. M. Carnot ne dit rien de l'emploi des caractères généraux ; laissant aux grandeurs toute leur indétermination ; mais nous suppléerons à son silence sur ce point en observant que, dans la substitution de ces caractères aux symboles des quantités déterminées, il n'y a simplement que l'objet du raisonnement qui change ; et que conséquemment, si le raisonnement demeure d'ailleurs le même, il n'y a point encore là un changement de méthode.

43. M. Carnot examine enfin l'opinion qui fait consister l'analise et la synthèse dans les deux sens, inverses l'un de l'autre, suivant lesquels on peut passer en revue la série des intermédiaires au moyen desquels on lie le connu à l'inconnu ; et il ne croit pas cette opinion plus fondée que les précédentes. Il en donne deux raisons principales ; la première, c'est qu'en adoptant cette opinion, les modernes ne pourraient s'attribuer l'invention de l'analise ; la seconde, c'est qu'on ne trouverait pas là une raison suffisante de l'immense supériorité de l'analise sur la synthèse.

44. Mais d'abord, on ne voit pas bien clairement pourquoi l'analise devrait être une méthode telle qu'on n'en pût attribuer l'invention

qu'aux modernes. Ce sont eux, à la vérité, qui ont généralisé, étendu et perfectionné l'application de ce que les anciens appelaient analise à la résolution des problèmes, application dont Diophante leur avait offert le premier exemple, en réduisant en algorithme l'analise logique de Platon. Mais c'est moins l'invention d'un algorithme que la manière dont on en fait usage, qui constitue une méthode; tout comme ce n'est pas le choix des caractères ou des sons qui constitue une langue parlée ou écrite.

45. On ne voit pas davantage pourquoi il serait nécessaire que la méthode à laquelle on se déterminerait à donner le nom d'analise eût une supériorité marquée sur celle qu'on appellerait synthèse; et il suffirait, certes, bien que ces deux méthodes différassent, soit dans le but soit dans les moyens, pour justifier la différence des dénominations qu'on leur aurait données; or, c'est ce qui a lieu, en effet, lorsqu'on entend les mots synthèse et analise suivant l'acception que nous leur avons données au commencement de cet article.

46. M. Carnot paraît n'avoir envisagé la synthèse et l'analise des anciens que sous l'unique point de vue de l'enseignement des vérités déjà découvertes, et il est bien certain qu'alors, en effet (8), elles n'ont absolument aucune sorte d'avantage l'une sur l'autre, et sont, dans chaque cas particulier, tout aussi propres l'une que l'autre à conduire au but auquel on veut atteindre. *Mais il n'en est plus de même* (17) lorsqu'il s'agit de découvrir des vérités nouvelles; et il est, certes, bien permis de regarder alors comme méthodes différentes deux méthodes qu'on ne peut employer indistinctement et entre lesquelles on ne peut se permettre de faire arbitrairement un choix. Il est très-vrai que, dans ce cas, comme dans celui où il s'agit d'exposer des vérités déjà découvertes, l'une des deux méthodes n'a aucune supériorité sur l'autre; mais encore un coup, rien ne nécessite cette supériorité; ce sont ici deux instrumens également nécessaires, et que l'inventeur doit employer tour-à-tour, suivant les circonstances dans lesquelles il se trouve.

47. M. Carnot ayant ainsi passé en revue tout ce qu'on a pu

appeler analise, et ne découvrant, dans tout cela, rien de conforme à l'idée qu'il s'est formée de cette méthode, se demande enfin quel peut donc être le caractère propre de l'analise; et il croit le rencontrer dans l'emploi des formes algébriques inintelligibles par elles-mêmes et dans l'application du calcul à ces espèces de symboles hiéroglyphiques. On sait d'ailleurs qu'il appelle ainsi les quantités négatives isolées, et toutes les expressions algébriques auxquelles elles peuvent donner naissance, telles que sont en particulier les expressions imaginaires. Suivant donc la doctrine de M. Carnot, soit qu'on cherche la vérité, soit qu'on veuille la montrer à autrui, soit qu'on parle la langue vulgaire ou qu'on emploie les symboles algébriques; soit enfin qu'on s'élève des vérités premières à d'autres vérités d'un ordre supérieur ou qu'on redescende de celles-ci aux vérités simples, on procèdera synthétiquement toutes les fois qu'on ne perdra pas son objet de vue et que les intermédiaires dont on fera usage seront des êtres réels tout-à-fait concevables pour l'intelligence et de nature à pouvoir être montrés, ainsi qu'il arrive constamment dans la géométrie élémentaire et très-fréquemment en algèbre; mais lorsque, au contraire, dans la chaîne des intermédiaires auxquels on aura eu recours pour lier deux vérités l'une à l'autre, il s'en trouvera un ou plusieurs, non susceptibles d'être conçus par l'esprit, et tout-à-fait inintelligibles pour lui, la méthode sera dès-lors analitique. D'ailleurs, une fois que, par cette méthode, on sera parvenu au but qu'on se proposait d'atteindre, on pourra, le plus souvent, quoiqu'avec moins de brièveté, substituer à la chaîne analitique une chaîne absolument synthétique; et c'est probablement, suivant M. Carnot, ce que Newton a fait dans ses *Principes*; et c'est ce que nous faisons souvent nous-mêmes, lorsque nous voulons mettre les hautes théories mathématiques à la portée des hommes peu versés dans la science du calcul.

48. Telle est, en substance, la doctrine de M. Carnot, sur l'analise et sur la synthèse; mais d'abord on peut se demander s'il est bien vrai que les quantités négatives isolées et toutes les expressions qui

en naissent, soient aussi inintelligibles qu'il le prétend? Nous croyons du moins avoir prouvé ailleurs (*) qu'on pouvait envisager la théorie des quantités négatives de manière à faire de ces quantités des êtres tout aussi intelligibles que peuvent l'être les quantités positives; et nous avons prouvé en même temps que, si l'on voulait regarder les quantités négatives isolées comme de simples formes algébriques, il fallait, pour être conséquent, ranger dans la même cathégorie les quantités fractionnaires et, à plus forte raison, les incommensurables. En outre, quelques tentatives qui ont été faites dans ces derniers temps (**), permettent tout au moins de douter si les imaginaires sont des êtres aussi inintelligibles qu'on l'avait cru jusqu'ici: or, il paraît peu convenable, à ce qu'il nous semble du moins, de fonder une doctrine sur une distinction contestée, et qui pourrait, à la rigueur, être tout-à-fait illusoire.

49. Admettons cependant que cette distinction soit aussi réelle qu'elle peut ne l'être pas; supposons, pour un moment, qu'il y ait, en effet, des formes algébriques tout-à-fait et à jamais inintelligibles par elles-mêmes. Comme il est toujours permis d'attacher à chacun des mots d'une langue une signification quelconque, et même de changer leur acception vulgaire, pour leur en donner une autre tout-à-fait différente; en appelant synthétique toute recherche dans laquelle on ne fait aucun usage des formes algébriques, et analitiques les recherches où, au contraire, on les met en œuvre; quelque loin qu'il se soit d'ailleurs placé des étymologies, M. Carnot n'aura fait qu'user d'un droit tout-à-fait incontestable. Mais aura-t-il fait convenablement d'user de ce droit, et sur-tout d'en user comme il l'a fait; et ne se sera-t-il pas même mis ainsi dans une sorte d'opposition avec ses principes? Voilà ce qu'il nous reste présentement à examiner.

(*) Voyez la page 6 du IV volume de ce recueil.

(**) Voyez les pages 61, 133, 222 et 364 du IV.e volume de ce recueil, et la page 197 du V.e

50.

50. Lorsque des méthodes ont reçu des noms depuis long-temps, et que d'autres, au contraire, n'ont point encore été qualifiees; il est certainement bien permis, en toute rigueur, de dépouiller les premières de leurs dénominations pour les transporter aux dernières; cependant, comme enfin il faut pouvoir dans le discours désigner les unes tout aussi bien que les autres, il deviendra nécessaire de remplacer pour les premières, par des dénominations nouvelles, les dénominations qu'on leur aura ainsi enlevées. Mais alors ne serait-il pas revenu au même dans le fond, et n'aurait-il pas été beaucoup plus raisonnable d'appliquer de suite ces dénominations nouvelles aux dernières méthodes, et de conserver aux premières des dénominations consacrées par un long usage, et tout-à-fait d'accord avec l'étymologie? Cela devient plus important encore, lorsque ces dénominations sont en usage dans diverses sciences qui peuvent ne pas s'accommoder toutes également bien de cette transposition de noms (*).

51. Pour que deux methodes puissent être réputées l'une synthétique et l'autre analitique, M. Carnot exige que ces méthodes soient essentiellement différentes; cependant il résulterait de ses idées sur l'analise et sur la synthèse qu'une même opération serait tantôt analitique et tantôt synthétique, suivant le rapport de grandeur des quantités soumises au calcul; et que même lorsqu'on opérerait sur des symboles généraux ou indéterminés, on ne pourrait point dire, après l'opération terminée, quel procédé on a suivi; puisque ce ne serait que par des applications numériques qu'on pourrait savoir si, dans le cours du calcul on a ou on n'a pas passé par des formes algébriques.

(*) Il est évident, par exemple que, si l'on se détermine avec M. Carnot, à consacrer exclusivement les mots analise et synthèse à désigner l'emploi et le non-usage des formes algébriques, il faudra nécessairement bannir ces mots de la langue de la chimie, puisque là il n'y a et il ne saurait y avoir des formes algébriques. Il est douteux que les chimistes se prêtent volontiers à cet arrangement.

Or, de quelle importance peut-il être de qualifier par deux dénominations différentes un procédé unique, suivant que les objets auxquels on l'applique ont entre eux tel ou tel autre rapport de grandeur?

52. Nous comparerions volontiers M. Carnot à un étranger qui, habitant la France depuis peu de temps, et ne connaissant pas encore bien exactement la valeur des mots de la langue française, se serait proposé de deviner de lui-même, par la seule fréquentation du monde, la véritable signification des mots synthèse et analise. Cet étranger, en effet, aurait pu raisonner à peu près comme il suit : « J'entends parler de toutes parts de l'extrême » supériorité de l'analise sur la synthèse, et lui attribuer *les im-* » *menses* progrès qu'ont fait les sciences exactes dans ces derniers » temps. J'entends dire aussi que l'analise est une *invention toute* » moderne; que les anciens géomètres n'ont procédé que synthé- » tiquement; que Newton lui-même n'a point procédé dans ses » *Principes* d'une manière différente; et que c'est sur-tout entre » les mains des Clairaut, des Euler, des Dalembert, des Lagrange » et des Laplace que l'analise a reçu un accroissement si prodigieux. » Je compare donc les écrits des anciens, et même ceux de Newton » aux productions de ces illustres modernes, et je *m'aperçois que*, » tandis que ces derniers me mènent à *la vérité à travers* une » multitude de symboles hiéroglyphiques inintelligibles pour mon » esprit, que tandis qu'ils perdent long-temps leur objet de vue, » pour s'occuper exclusivement de ces symboles, et des diverses » combinaisons dont ils peuvent être susceptibles, les autres, au » contraire, n'abandonnent jamais leur objet, et ne m'en montrent » jamais que des transformations et combinaisons réalisables, et que mon » esprit peut concevoir; mais je vois, en même temps que, tandis que » la marche de ceux-ci a quelque chose de traînant et d'embarrassé, » celle des autres, au contraire, quoique moins lumineuse, est incom- » parablement plus rapide, et qu'elle est susceptible de s'élever à » des hauteurs où l'autre ne saurait que très-difficilement atteindre;

» je me trouve donc fondé à soupçonner, avec beaucoup de vraisemblance, que c'est principalement l'emploi ou le non-usage » des symboles hiéroglyphiques, des formes algébriques inintelligibles, » qui constitue la différence entre l'analise et la synthèse ».

53. Mais notre étranger aurait pu tout aussi bien raisonner ainsi ; « Je vois chez les modernes un algorithme tout-à-fait inconnu aux » anciens ; mais j'aperçois en même temps que cet algorithme ne » présente qu'une traduction abrégée de la manière de raisonner et » de découvrir la vérité que Platon avait enseignée à ceux-ci, et » que son principal avantage est seulement de réduire le raisonnement » à des procédés sûrs et purement mécaniques ; ce qui a permis à » un plus grand nombre d'hommes de s'occuper des spéculations » mathématiques, d'en perfectionner l'instrument, et de les pousser » plus avant ; je rencontre en outre parmi les inventions des mo- » dernes l'usage de représenter les grandeurs par des symboles géné- » raux et indéterminés ; j'y rencontre aussi les méthodes différentielles » et intégrales ; et je suis fondé à croire que c'est à l'ensemble de » toutes ces diverses ressources que les modernes doivent leur supé- » riorité en mathématiques. Je sais d'ailleurs fort bien que tous ceux » qui parlent la même langue n'attachent pas constamment les » mêmes idées aux mêmes mots, que quelquefois même ils négligent » d'en faire un usage exactement conforme aux idées qu'il y attachent, » et qu'enfin, par répugnance pour les mots nouveaux, ils emploient » souvent un même mot sous des acceptions diverses. Il est donc » possible et même fort probable que, donnant au tout le nom » de la partie, ils auront, par abus de langage, compris sous la » dénomination commune d'analise l'ensemble des moyens qu'ils ont » créés pour perfectionner les sciences exactes ; mais il s'en suivra » uniquement qu'en s'exprimant ainsi, ils s'expriment d'une manière » peu rigoureuse ; et que l'analise et la synthèse, proprement dites, » n'en demeurent pas moins, suivant l'étymologie, ce qu'elles étaient » au temps de Platon ».

54. Nous n'avons pas besoin d'observer, au surplus, que les

idées de M. Carnot sur l'analise et sur la synthèse ne sont pas mieux d'accord avec celles de Condillac qu'avec les nôtres. Si on les adoptait, la qualification de *méthode ténébreuse* que Condillac donne, on ne sait pourquoi, à la synthèse, conviendrait incomparablement mieux à l'analise. Mais, une méthode, tout comme une route souterraine, pour être ténébreuse, peut fort bien, malgré cela, n'en être pas moins sure, et c'est là, en effet, le cas de l'analise, dans le sens que M. Carnot attache à cette expression.

55. C'est sans doute une très-heureuse témérité, de la part des géomètres, que d'avoir osé soumettre au calcul certaines expressions dont ils ne pouvaient eux-mêmes avoir une idée bien nette à l'époque où ils se sont déterminés à en faire usage; et cette témérité a puissamment contribué au progrès de l'analise. Rien ne s'oppose certainement à ce qu'on caractérise l'usage de ces expressions par une *dénomination* particulière; mais il nous paraît, encore un coup, souverainement raisonnable de conserver aux mots synthèse et analise une signification à la fois conforme à l'étymologie et consacrée par un long usage. On ne pourrait d'ailleurs leur donner une nouvelle destination, qu'en les remplaçant, dans la leur, par d'autres mots qui, avec quelque soin qu'on les choisisse, aurait long-temps contre eux la défaveur dont nous frappons constamment tout ce qui s'écarte de nos habitudes.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Ébauche de solution du problème de géométrie proposé à la page 128 de ce recueil;

Par un ABONNÉ.

~~~~~~~~

ÉNONCÉ. Démontrer que, quelles que soient la nature et la situation respective de deux sections coniques, tracées sur un même plan, il est toujours permis de considérer leur système comme la perspective du système de deux cercles, tracés sur un autre plan? Déterminer, en outre, toutes les diverses situations de l'œil qui donnent, en effet, le système de deux cercles pour perspective de ces deux courbes?

Solution. Tout se réduit évidemment à trouver deux cônes de même sommet, ayant ces deux courbes pour bases, et qui soient tels que leurs sections, par un même plan, convenablement dirigé, soient deux cercles.

Soient pris des plans coordonnés rectangulaires; et supposons que le plan des xy soit celui des deux courbes dont il s'agit; soient a, b, c les coordonnées du sommet commun de deux cônes
~~~~~~~~

ayant ces courbes pour bases. Si un même plan peut couper ces cônes suivant deux cercles, il devra en être de même de tout autre plan parallèle à celui-là ; d'où il suit qu'il est toujours permis de supposer que le plan coupant passe par l'origine.

Soit donc prise pour équation de ce plan coupant

$$z=px+qy\,. \qquad (1)$$

Soient α, β, γ les coordonnées du centre du cercle résultant de la section de l'un des deux cônes par ce plan ; on devra avoir

$$\gamma=p\alpha+q\beta\,: \qquad (2)$$

Si ensuite on désigne par r le rayon de ce cercle, il se trouvera être l'intersection du plan (1) avec la sphère ayant pour équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2\,. \qquad (3)$$

Cela posé, soient

$$x-a=m(z-c)\,,\quad y-b=n(z-c)\,, \qquad (4)$$

les équations d'une droite quelconque passant par le sommet du cône ; en combinant ces équations avec l'équation (1), on trouvera, pour les coordonnées de l'intersection de la droite (4) et du plan (1),

$$\left.\begin{aligned} x&=a-m.\frac{c-pa-qb}{1-pm-qn}\,,\\ y&=b-n.\frac{c-pa-qb}{1-pm-qn}\,,\\ z&=c-\frac{c-pa-qb}{1-pm-qn}\,.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Si donc on veut que la droite (4) soit une génératrice du cône; il faudra que ces coordonnées satisfassent à l'équation de la sphère (3); ce qui donnera

$$\left\{a-\alpha-m.\frac{c-pa-qb}{1-pm-qn}\right\}^2+\left\{b-\beta-n.\frac{c-pa-qb}{1-pm-qn}\right\}^2+\left\{c-\gamma-\frac{c-pa-qb}{1-pm-qn}\right\}^2=r^2\,;$$

ou, en développant et rassemblant les termes de même nature

$$\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2-r^2\}-2\{m(a-\alpha)+n(b-\beta)+(c-\gamma)\}.\frac{c-pa-qb}{1-pm-qn}$$

$$+(1+m^2+n^2)\left\{\frac{c-pa-qb}{1-pm-qn}\right\}^2=0\,.$$

ou encore

$$\left.\begin{aligned} \{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2-r^2\}(1-pm-qn)^2&\\ -2\{m(a-\alpha)+n(b-\beta)+(c-\gamma)\}(c-pa-qb)(1-pm-qn)&\\ +(c-pa-qb)^2(1+m^2+n^2)=0\,.&\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Telle est donc la relation qui doit exister entre m et n pour que les équations (4) appartiennent à une génératrice du premier des deux cônes.

On obtiendra donc l'équation de ce premier cône, en *éliminant* m et n de l'équation (6), au moyen des équations (4); ce qui donnera, en chassant les dénominateurs,

$$\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2-r^2\}\{p(x-a)+q(y-b)-(z-c)\}^2$$

$$+2(c-pa-qb)\{p(x-a)+q(y-b)-(z-c)\}\{(a-\alpha)(x-a)+(b-\beta)(y-b)+(c-\gamma)(z-c)\}$$

$$+(c-pa-qb)^2\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}=0. \qquad (7)$$

En faisant $z=0$, dans cette équation, on trouvera, pour l'intersection du cône avec le plan des xy

$$\{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(a-\gamma)^2-r^2\}\{p(x-a)+q(y-b)+c\}^2$$

$$+2(c-pa-qb)\{p(x-a)+q(y-b)+c\}\{(a-\alpha)(x-a)+(b-\beta)(y-b)-(c-\gamma)c\}$$

$$+(c-pa-qb)^2\{(x-a)^2+(y-b)^2+c^2\}=0;$$

ou, en développant, ordonnant et ayant égard à l'équation (2), en vertu de laquelle

—pa

$$c-pa-qb=(c-\gamma)-p(a-\alpha)-q(b-\beta)\,;$$

$$\{(1+p^2)(c-\gamma)^2-2q(b-\beta)(c-\gamma)+(p^2+q^2)(b-\beta)^2-p^2r^2\}(x-a)^2$$

$$+\{(1+q^2)(c-\gamma)^2-2p(a-\alpha)(c-\gamma)+(p^2+q^2)(a-\alpha)^2-q^2r^2\}(y-b)^2$$

$$+2\{pq(c-\gamma)^2+p(b-\beta)(c-\gamma)+q(a-\alpha)(c-\gamma)-(p^2+q^2)(a-\alpha)(b-\beta)-pqr^2\}(x-a)(y-b)$$

$$+2c\{p(b-\beta)^2+(1+p^2)(a-\alpha)(c-\gamma)+pq(b-\beta)(c-\gamma)-q(a-\alpha)(b-\beta)-pr^2\}(x-a)$$

$$+2c\{q(a-\alpha)^2+(1+q^2)(b-\beta)(c-\gamma)+pq(a-\alpha)(c-\gamma)-p(a-\alpha)(b-\beta)-qr^2\}(y-b)$$

$$+c^2\{(1+p^2)(a-\alpha)^2+2pq(a-\alpha)(b-\beta)+(1+q^2)(b-\beta)^2-r^2\}=0\,. \qquad (8)$$

Cela posé, soient prises pour les équations de nos deux courbes, tracées sur le plan des xy,

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0\,, \qquad (9)$$

$$A'x^2+B'y^2+2C'xy+2D'x+2E'y+F'=0\,. \qquad (10)$$

La première pourra être mise sous la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{l} A(x-a)^2+B(y-b)^2+2C(x-a)(y-b) \\ +2(Aa+Cb+D)(x-a)+2(Bb+Ca+E)(y-b) \\ +(Aa^2+Bb^2+2Cab+2Da+2Eb+F)=0\,. \end{array}\right\} \quad (11)$$

Cette équation ne devant différer au plus de l'équation (8) que par un certain facteur λ, on devra avoir

$$(1+p^2)(c-\gamma)^2-2q(b-\beta)(c-\gamma)+(p^2+q^2)(b-\beta)^2-p^2r^2=\lambda A\,, \qquad \text{(I)}$$

$$(1+q^2)(c-\gamma)^2-2p(a-\alpha)(c-\gamma)+(p^2+q^2)(a-\alpha)^2-q^2r^2=\lambda B\,, \qquad \text{(II)}$$

$$pq(c-\gamma)^2+p(b-\beta)(c-\gamma)+q(a-\alpha)(c-\gamma)-(p^2+q^2)(a-\alpha)(b-\beta)-pqr^2=\lambda C\,, \qquad \text{(III)}$$

$$c\left\{p(b-\beta)^2+(1+p^2)(a-\alpha)(c-\gamma)+pq(b-\beta)(c-\gamma)-q(a-\alpha)(b-\beta)-pr^2\right\}$$
$$=\lambda(Aa+Cb+D)\,, \qquad \text{(IV)}$$

$$c\left\{q(a-\alpha)^2+(1+q^2)(b-\beta)(c-\gamma)+pq(a-\alpha)(c-\gamma)-p(a-\alpha)(b-\beta)-qr^2\right\}$$
$$=\lambda(Bb+Ca+E)\,, \qquad \text{(V)}$$

$$c\left\{(1+p^2)(a-\alpha)^2+2pq(a-\alpha)(b-\beta)+(1+q^2)(b-\beta)^2-r^2\right\}$$
$$=\lambda(Aa^2+Bb^2+2Cab+2Da+2Eb+F) \qquad \text{(VI)}$$

équations auxquelles il faudra joindre l'équation de condition

$$\gamma=p\alpha+q\beta\,. \qquad \text{(VII)}$$

Si, entre ces sept équations, on élimine les cinq quantités α, β, γ, r, λ, on obtiendra deux équations entre a, b, c, p, q et les coefficiens de l'équation (9); lesquelles pourront être représentées par

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(a\,,\,b\,,\,c\,,\,p\,,\,q\,,\,A\,,\,B\,,\,C\,,\,D\,,\,E\,,\,F)=0\,,\\&\psi(a\,,\,b\,,\,c\,,\,p\,,\,q\,,\,A\,,\,B\,,\,C\,,\,D\,,\,E\,,\,F)=0\,;\end{aligned}\right\}\ (12)$$

au moyen desquelles le sommet du cône étant donné, on déterminera les quantités p, q qui fixent la direction commune des plans qui donnent des sections circulaires. A l'inverse, la direction commune de ces plans étant donnée, en changeant, dans ces équations, a, b, c en x, y, z, respectivement, ces équations appartiendront à une courbe à double courbure dont chaque point pourra être pris indistinctement pour le sommet du cône donnant des sections circulaires.

En raisonnant sur la courbe (10) comme sur la courbe (9), on obtiendra deux autres équations

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(a\,,\,b\,,\,c\,,\,p\,,\,q\,,\,A'\,,\,B'\,,\,C'\,,\,D'\,,\,E'\,,\,F')=0\,,\\ \psi(a\,,\,b\,,\,c\,,\,p\,,\,q\,,\,A'\,,\,B'\,,\,C'\,,\,D'\,,\,E'\,,\,F')=0\,.\end{array}\right\}(13)$$

En éliminant p et q entre les quatre équations (12 et 13), et changeant a, b, c en x, y, z dans les équations résultantes; ces deux équations appartiendront à une courbe à double courbure lieu des sommets des cônes susceptibles d'être coupés circulairement par un même plan.

On voit par là que, généralement parlant, trois sections coniques tracées sur un même plan ne sauraient être considérées comme les perspectives de trois cercles tracés sur un autre plan; puisqu'il faudrait pour cela que le sommet commun des trois cônes se trouvât à la fois sur deux courbes à double courbure qui, en général, ne se coupent point dans l'espace.

On voit aussi qu'en général, tout théorème ou problème de la géométrie de la règle, relatif à deux cercles tracés sur un même plan, est applicable à deux sections coniques quelconques, tracées aussi sur un même plan.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. PARTAGER un tétraèdre donné en quatre autres tétraèdres équivalens entre eux, par des plans passant par ses six arètes et par un même point pris dans son intérieur ?

II. Partager un tétraèdre donné en quatre exaèdres équivalens, par six plans perpendiculaires à ses arètes, et passant par un même point pris dans son intérieur ?

Théorème de Géométrie.

Un tétraèdre rectangle, c'est-à-dire, un tétraèdre dont un des angles trièdre est tri-rectangle, étant inscrit à une sphère ; la somme des distances des trois sommets de la face hypothénusale au plan d'un grand cercle quelconque, est égale à la distance du sommet opposé à cette face au plan du même grand cercle ?

FIN DU SEPTIÈME VOLUME.

TABLE

Des matières contenues dans le VII.e volume des Annales.

ANALISE ALGÉBRIQUE.

ANALISE TRANSCENDANTE.

ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE.

ASTRONOMIE.

COMBINAISONS.

GÉOMETRIE ANALITIQUE.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

GÉOMÈTRIE ELEMENTAIRE.

GÉOMETRIE TRANSCENDANTE.

GNOMONIQUE.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE.

VARIÉTÉS.



CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et les* questions résolues.

ERRATA

Pour le septième volume des Annales.



PAGE 13, ligne dernière, — $\frac{Gp}{\mu^2-H^2}$; *lisez :* $\frac{G\mu}{\mu^2-H^2}$.

Page 84, ligne 11, — *nz*; *lisez* : *μz*.

Page 183, au titre des *questions résolues*, — après 348; *ajoutez* : *du VI.e volume*.

Page 213, ligne dernière, — *IG*; *lisez* : *IH*.

Page 221, ligne 13, — après *An*; *ajoutez* : *nA*.

Page 222, ligne 9, — *VII*; *lisez* : *VI*.

Pag. 253, au titre des *questions résolues*, — 250; *lisez* : 251.

Ibid. au texte, ligne première, — 150; *lisez* : 250.

Pag. 359, à la note, ligne 4, en remontant, — exprit; *lisez* : esprit.



